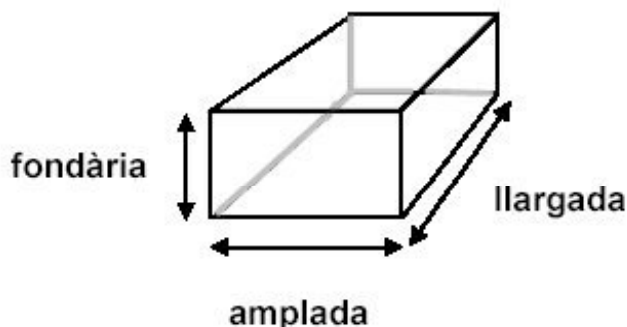


## 1. UNITATS DE VOLUM

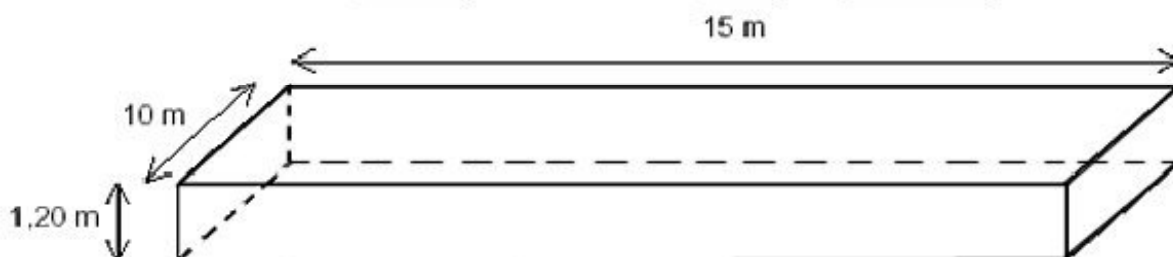
El **volum** és la mesura de l'espai ocupat per un cos.

A l'espai de tres dimensions es mesuren la longitud de la **llargada**, l'**altura** (o **fondària**) i l'**amplada**.



Un exemple de la terminologia utilitzada per esmentar aquestes dimensions:

■ La piscina té 10 m d'ample per 15 m de llarg. La fondària és d'1,20 m.



El producte d'aquestes tres dimensions dona el volum del cos, expressat en unitats cúbiques ( $u^3$ ), on  $u$  és la unitat en què s'expressen cada una de les tres mesures.

El **metre cúbic** (símbol  $m^3$ ) és la unitat derivada del Sistema Internacional per al volum. És el volum d'un cub amb els costats d'un metre de longitud.

Un **metre cúbic** d'aigua pura a una temperatura de  $3,98\text{ }^{\circ}\text{C}$  i a una pressió d'una atmosfera, té una massa de 999,972 kg (gairebé una **tona**).

1 **metre cúbic** equival a:

- 1 000 decímetres cúbics ( $dm^3$ )
- 1 000 000 centímetres cúbics ( $cm^3$ )
- 1 000 000 000 mil·límetres cúbics ( $mm^3$ )

Un cub que mesura 1 cm, tant de llargada, com d'altura i fondària direm que ocupa un volum d'1  $cm^3$ , o que té un volum d'1  $cm^3$ .

Un **quilòmetre cúbic** ( $km^3$ ) és el volum igual a un cub d'un **quilòmetre** de costat.

El mateix podem dir de l'**hectòmetre cúbic** ( $hm^3$ ) i del **decàmetre cúbic** ( $dam^3$ ).

Així:

- $1\text{ km}^3 = 1\,000\,000\,000\text{ m}^3$
- $1\text{ hm}^3 = 1\,000\,000\text{ m}^3$
- $1\text{ dam}^3 = 1\,000\text{ m}^3$

# 1. VOLUM DE PRISMES. VOLUM DEL CUB I L'ORTÒEDRE. VOLUM DE LA PIRÀMIDE

## 1.1 VOLUM DE PRISMES. VOLUM DEL CUB I L'ORTÒEDRE

Per clarificar el concepte de volum necessitem començar pels volums més senzills, com són el del cub i el de l'ortòedre. A la figura 1 il·lustrem la manera de deduir el volum d'un cub de 4 cm d'aresta.

Vegem quants centímetres cúbics té el cub de la figura. Pensem que hi caben quatre plaques iguals d'1 cm d'altura. Per cobrir la primera placa amb centímetres cúbics, necessitem quatre cubs d'1 cm<sup>3</sup> a cada costat, és a dir, un total de  $4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}^3$ . Com que tenim quatre capes iguals a l'anterior, el volum del cub:  $V = 16 \text{ cm}^3 \cdot 4 = 64 \text{ cm}^3 = 4^3 \text{ cm}^3$ .

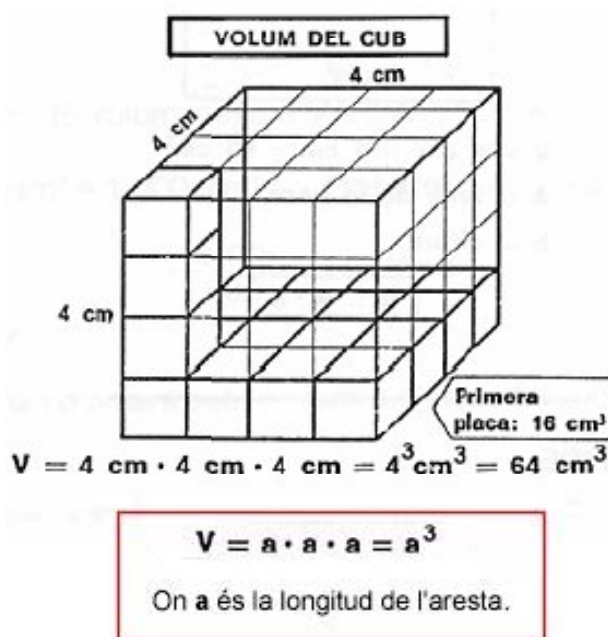


Figura 1

¿Quin és el volum de l'ortòedre de la figura 2?

Per cobrir la primera placa necessitem quatre cubs d'1 cm<sup>3</sup> a un costat i tres cubs d'1 cm<sup>3</sup> a l'altre, és a dir, necessitem  $4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}^3$ . Com que tenim dues plaques iguals que aquesta, el volum és:  $V = 12 \text{ cm}^3 \cdot 2 = 24 \text{ cm}^3 = 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm}$ .

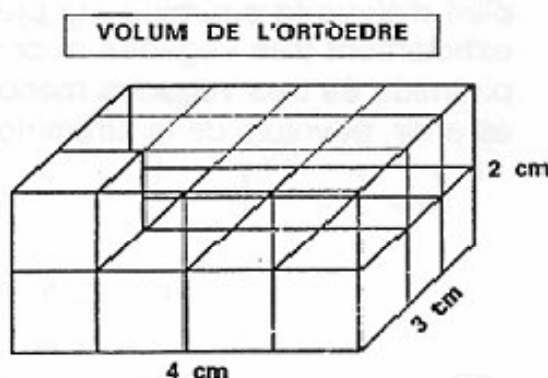


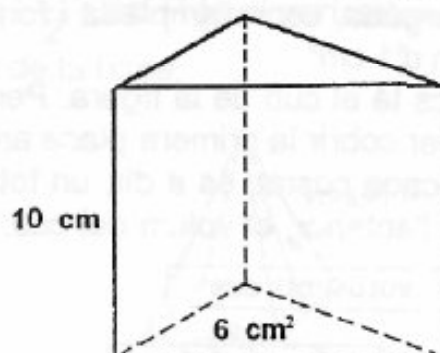
Figura 2

Parlem ja del volum d'un prisma recte. Ho il·lustrarem amb el prisma triangular de la

figura 3. ¿Quin és el seu volum si l'àrea de la base és  $6 \text{ cm}^2$  i l'altura  $10 \text{ cm}$ ? Per cobrir la base amb centímetres cúbics necessitarem una placa de tants centímetres cúbics com indica l'àrea, en aquest cas  $6 \text{ cm}^3$ . Com que l'altura del prisma és  $10 \text{ cm}$ , necessitem 10 plaques iguals a l'anterior; per tant, el nombre total de centímetres cúbics és:  $V = 6 \text{ cm}^3 \cdot 10 = 60 \text{ cm}^3 = 6 \text{ cm}^2 \cdot 10 \text{ cm}$ .

Amb els altres prismes rectes es fa de la mateixa manera. El volum és l'àrea de la base per l'altura.

#### VOLUM DEL PRISMA



$$V = 6 \text{ cm}^2 \cdot 10 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^3$$

$A$  = àrea de la base

$h$  = altura

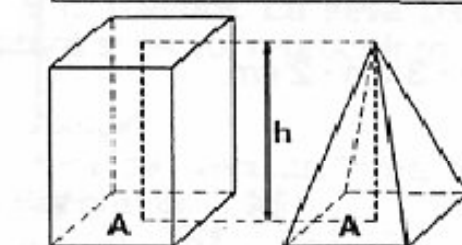
$$V = A \cdot h$$

Figura 3

## 1.2 VOLUM DE LA PIRÀMIDE

Observem a la figura 4 un prisma recte i una piràmide de base i altura iguals. Si omplim d'aigua la piràmide i la tirem dins el prisma, comprovarem que en aquest hi cap exactament tres vegades el contingut de la piràmide. Això indica que el volum de la piràmide és tres vegades menor que el volum del prisma d'igual base i d'igual altura, és a dir, el volum de la piràmide és un terç de l'àrea de la base per l'altura.

#### VOLUM DE LA PIRÀMIDE



$A$  = àrea de la base

$h$  = altura

$$V = \frac{A \cdot h}{3}$$

Figura 4

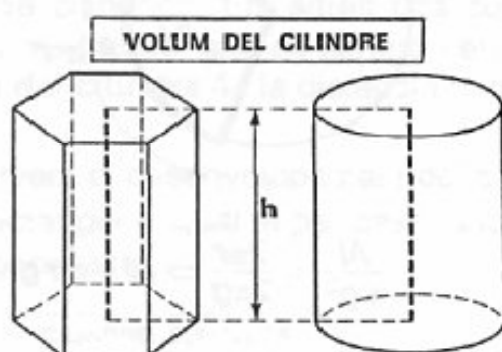
## 2. VOLUM DEL CILINDRE, EL CON I L'ESFERA

Observem a la figura 1 un prisma hexagonal i un cilindre les bases dels quals tenen la mateixa àrea i les altures són iguals. Si omplim d'aigua el prisma i l'aboquem dins el cilindre, comprovarem que el cilindre queda completament ple; per tant, el cilindre i el prisma de la figura tenen el mateix volum. Com que la base del cilindre és un cercle d'àrea  $\pi \cdot r^2$ , i l'altura és **h**, el volum és  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Observem ara la figura 2, on hi ha un con i una piràmide quadrangular les bases dels quals tenen la mateixa àrea i les altures són iguals. Omplint d'aigua la piràmide i abocant-la dins el con, també es comprova que tenen el mateix volum. Com que la base del con és un cercle d'àrea  $\pi \cdot r^2$  i l'altura és **h**, el volum és:

$$V = \frac{(\pi \cdot r^2 \cdot h)}{3}$$

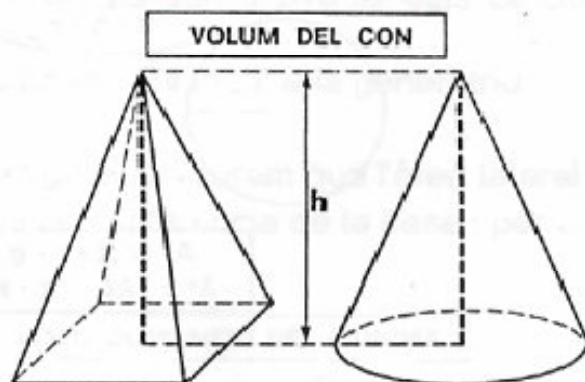
Figura 1



$$\text{Àrea base} = \pi \cdot r^2$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Figura 2



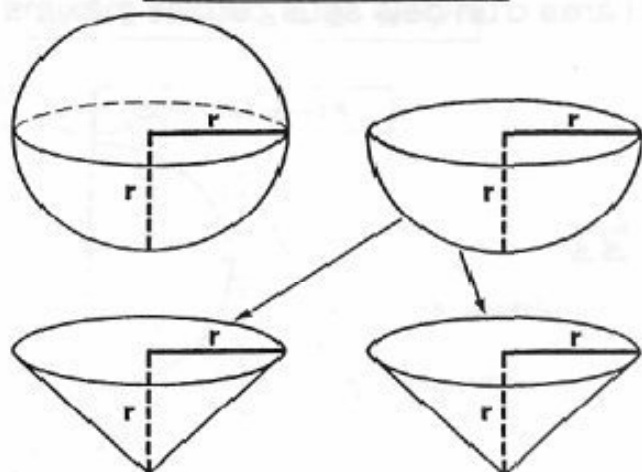
$$\text{Àrea base} = \pi \cdot r^2$$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

Observem a la figura 3 una esfera de radi **r** i dos cons tals que els radis de les bases i les altures són iguals al radi de l'esfera. Es considera la semiesfera de radi **r** i es comprova que hi cap la mateixa quantitat d'aigua que en els dos cons. Amb això conduïm que:

# VOLUM DE L'ESFERA

Figura 3



$$\begin{aligned} \text{Volum semiesfera} &= 2 \cdot V_{\text{con}} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r = \frac{2}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

Per tant, el volum de l'esfera val  $V = 2 \cdot \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$

$$V_{\text{ esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$