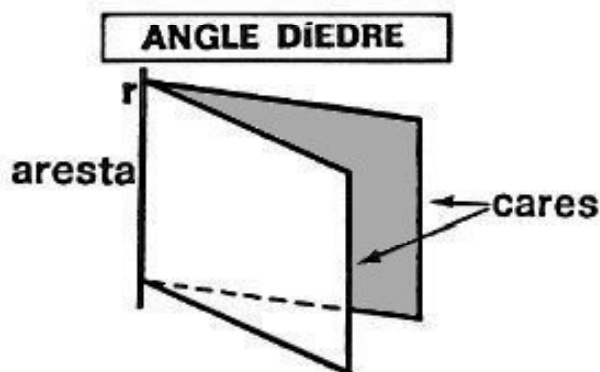


1. GEOMETRIA A L'ESPAI

1.1 ANGLE DÍEDRE. RECTILINI D'UN DÍEDRE. DÍEDRES COMPLEMENTARIS. DÍEDRES SUPLEMENTARIS

Observa a la figura 1 dos semiplans que tenen una recta r en comú. La porció de l'espai limitada per dos semiplans s'anomena **angle díedre**. Cada semiplà s'anomena **cara** de l'angle díedre. La recta d'intersecció de les cares del díedre s'anomena **aresta**.

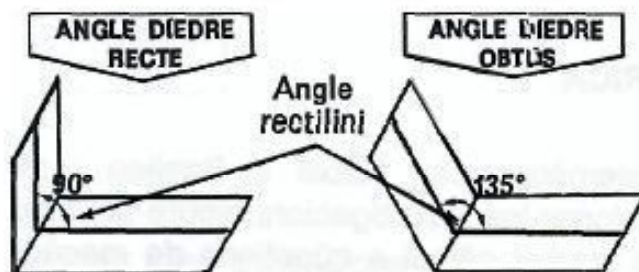
Figura 1



Observa a la figura 2 que hem traçat en el díedre dues perpendiculars a l'aresta en el mateix punt, situades cada una d'elles en una cara. L'angle format per aquestes perpendiculars s'anomena **angle rectilini del díedre**.

La mesura d'un **angle díedre** és la mateixa que la del seu **angle rectilini**; així, si el rectilini és angle recte, el díedre és també recte.

Figura 2



Diem que dos díedres són **complementaris (suplementaris)** si els seus rectilinis són **angles complementaris (suplementaris)**.

A la figura 3 són díedres complementaris perquè els seus angles rectilinis **AOB** i **BOC** són angles complementaris. A la figura 4, són díedres suplementaris perquè els angles corresponents són suplementaris.

Figura 3

DÍEDRES COMPLEMENTARIS

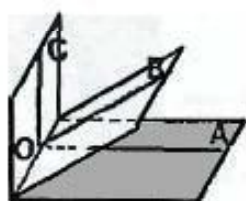
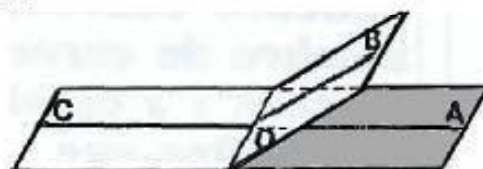


Figura 4

DÍEDRES SUPLEMENTARIS



1.2 DEFINICIÓ DE POLÍEDRE REGULAR. POLÍEDRES REGULARS I EL SEU DESENVOLUPAMENT

A l'apartat anterior vam definir **angle díedre** com la porció de l'espai limitada per dos semiplans els quals s'anomenen cares.

Definim **angle políedre** com la porció de l'espai limitada per tres o més plans els quals concorren en un punt anomenat **vèrtex**.

Políedre és una regió d'espai limitada per polígons. A cada vèrtex del políedre hi ha un angle políedre limitat per tres o més polígons, que són les figures geomètriques planes determinades dins els plans concurrents en aquest vèrtex. A la figura 5 observem la visió en tres dimensions d'aquests políedres.

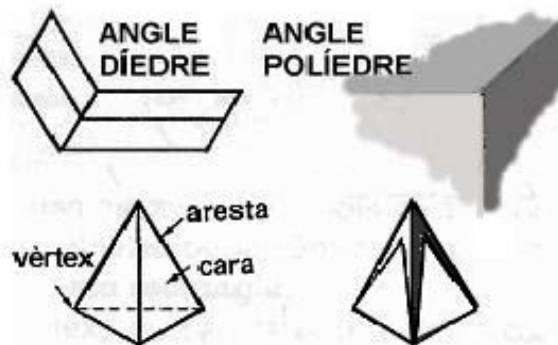
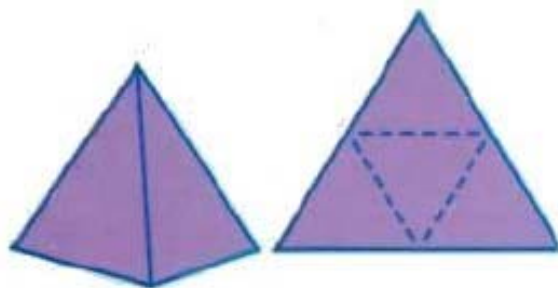


Figura 5

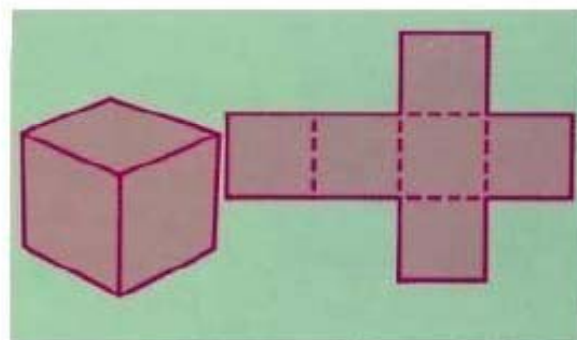
Políedre regular és el que té tots els angles díedres i tots els angles políedres iguals i les cares són polígons regulars iguals.

A la figura 6 de la pàgina següent tenim els cinc políedres regulars coneguts i el seu desenvolupament, obtingut estenent sobre un pla les cares del políedre.

POLÍEDRE	NOMBRE DE CARES	POLÍGON DE LA CARA
Tetràedre regular	4	Triangle equilàter
Hexàedre regular	6	Quadrat
Octàedre regular	8	Triangle equilàter
Dodecàedre regular	12	Pentàgon regular
Icosàedre regular	20	Triangle equilàter

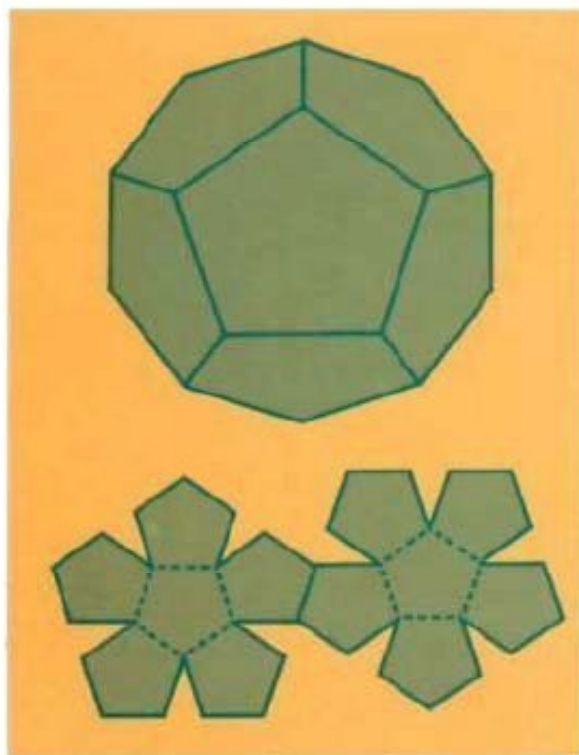


TETRAÈDRE REGULAR

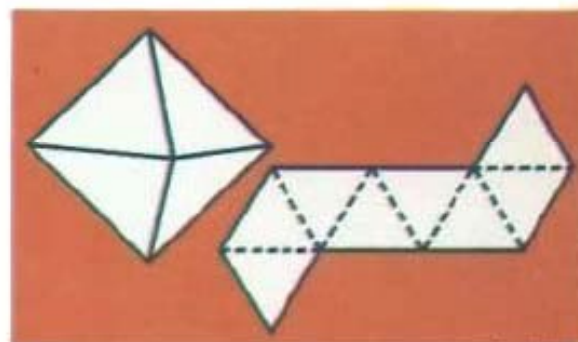


HEXÀEDRE REGULAR (CUB)

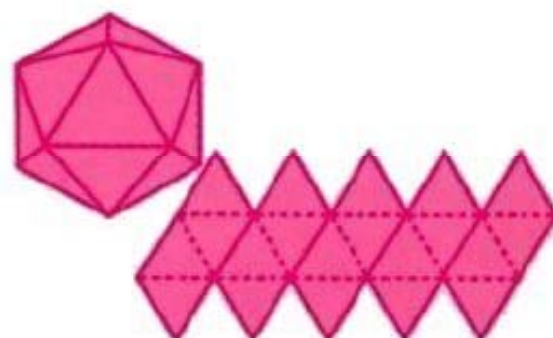
Figura 6



DODECÀEDRE REGULAR



OCTÀEDRE REGULAR



ICOSÀEDRE REGULAR

1.3 ELS PRISMES. PRISMES RECTES I PRISMES REGULARS

Els prismes són poliedres les cares laterals dels quals són tres o més paral·lelograms i les bases són polígons iguals i paral·lels. L'**altura** d'un prisma és la distància entre les bases. Observem a la figura 7 els elements d'un prisma. Segons com siguin els polígons de les bases, els prismes poden ser **triangulars**, **quadrangulars**, **pentagonals**, **hexagonals**, etc.

ELEMENTS D'UN PRISMA

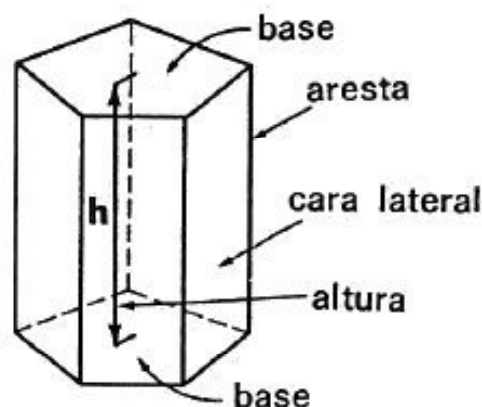
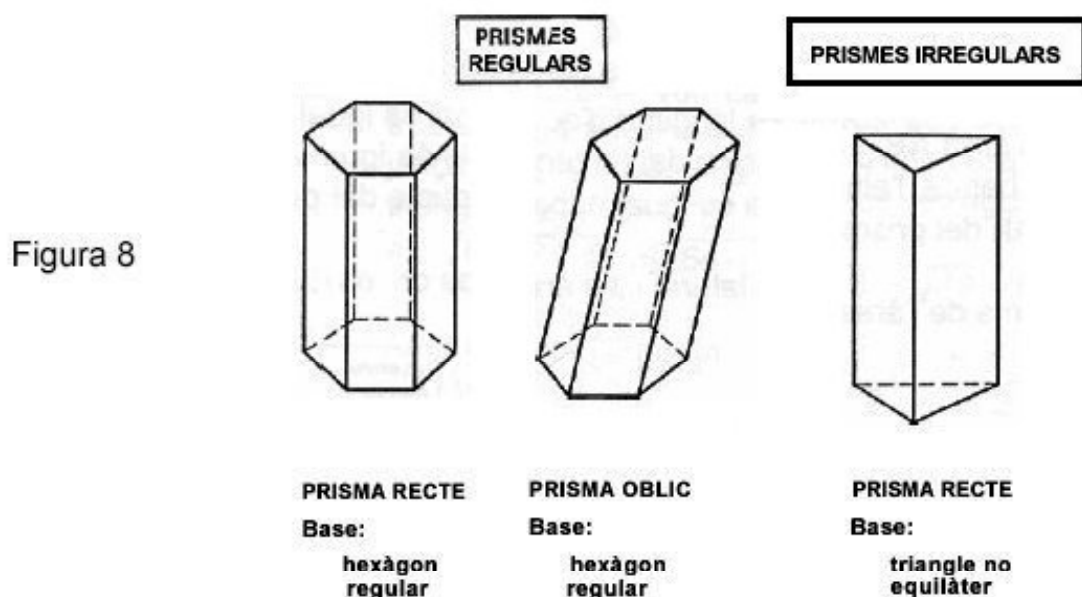


Figura 7

Prismes rectes són aquells les cares laterals dels quals són rectangles o quadrats.
Prismes regulars són els prismes rectes les bases dels quals són polígons regulars.
 A la figura 8 en tenim alguns exemples així com de **prismes irregulars**.



Paral·lelepípedes són els prismes les bases dels quals són paral·lelograms. Quan tots sis paral·lelograms del paral·lelepípede són rectangles, el paral·lelepípede s'anomena **ortòedre** o **paral·lelepípede rectangle**.

El segment que uneix dos vèrtexs no situats a la mateixa cara s'anomena diagonal. Les quatre diagonals de l'ortòedre són iguals.

1.4 LES PIRÀMIDES

Les piràmides són els poliedres la base dels quals és un polígon qualsevol i les cares laterals són triangles que tenen un vèrtex comú. Aquest vèrtex comú s'anomena **vèrtex** o **cúspide** de la piràmide. L'**altura** de la piràmide és la distància del vèrtex a la base.

Piràmides regulars són aquelles la base de les quals és un polígon regular i les cares laterals són triangles isòsceles iguals. L'**apotema** d'una piràmide regular és l'altura de qualsevol de les cares laterals. Segons el polígon de la base, les piràmide poden ser **triangulars**, **quadrangulars**, **pentagonals**, **hexagonals**, etc. A la figura 9 en tenim un exemple.

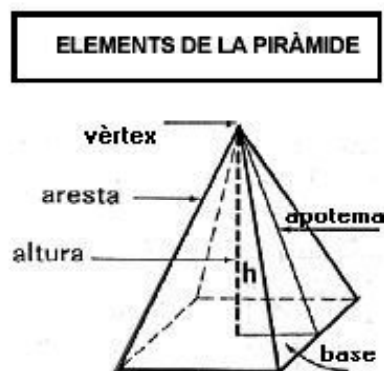


Figura 9

1.5 GENERACIÓ DELS COSSOS DE REVOLUCIÓ MÉS CONEGUTS: CILINDRE, CON I ESFERA

El **cilindre** és el cos generat per un rectangle que gira al voltant d'un dels seus costats.

El **con** és el cos generat per un triangle rectangle quan gira al voltant d'un dels seus catets.

L'**esfera** és el cos generat per una circumferència que gira sobre el seu diàmetre.

Elements de cadascun d'aquests cossos de revolució. Comencem per la figura SÍ.

L'**eix del cilindre** és el costat fix al voltant del qual gira el rectangle.

La **generatriu del cilindre** és el costat oposat a l'eix i és, per tant, el que genera la superfície cilíndrica. Els altres dos costats del rectangle són els radis dels cercles -anomenats **bases**- que es generen en girar aquells.

L'**altura del cilindre** és la distància entre les dues bases. És igual a la generatriu.

Observem els elements del cilindre i el seu desenvolupament a la figura 10.

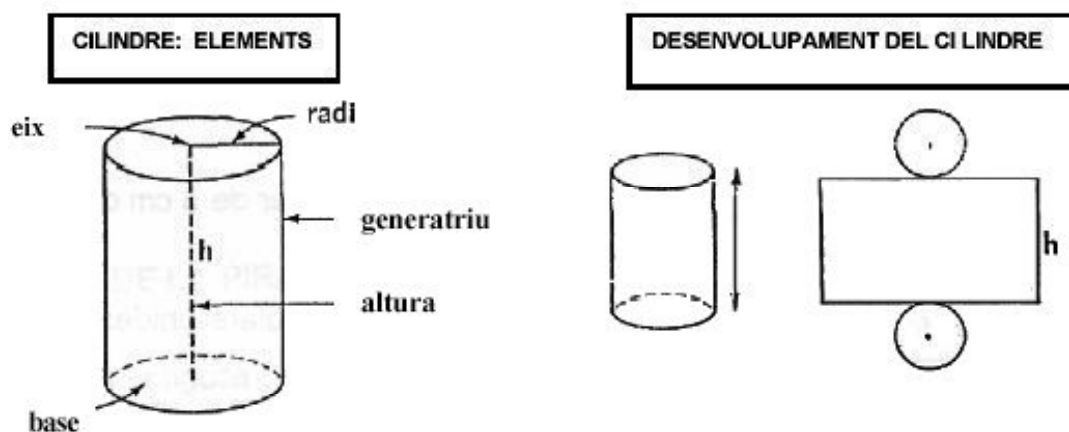


Figura 10

L'**eix del con** és el catet fix al voltant del qual gira el triangle. La longitud d'aquest catet és l'**altura del con**. També diem que l'**altura** és la distància del vèrtex a la base. La **generatriu del con** és la hipotenusa del triangle rectangle que gira al voltant d'un catet. El catet que no dona l'altura és el radi del cercle que es genera en aquest gir. Aquest cercle és la **base del con**.

A la figura 11 veiem aquests elements.

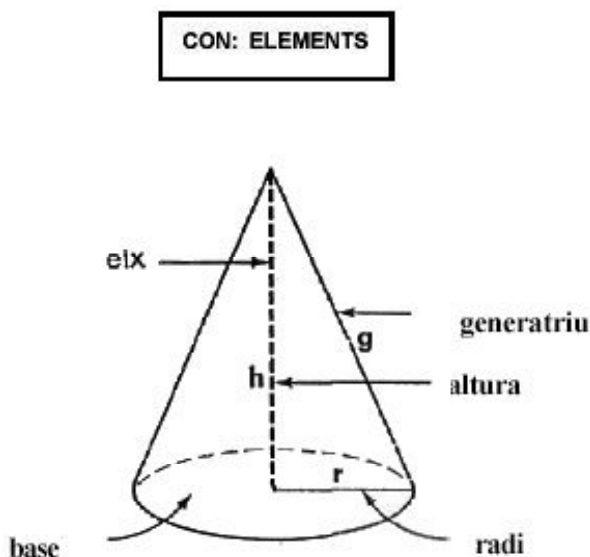
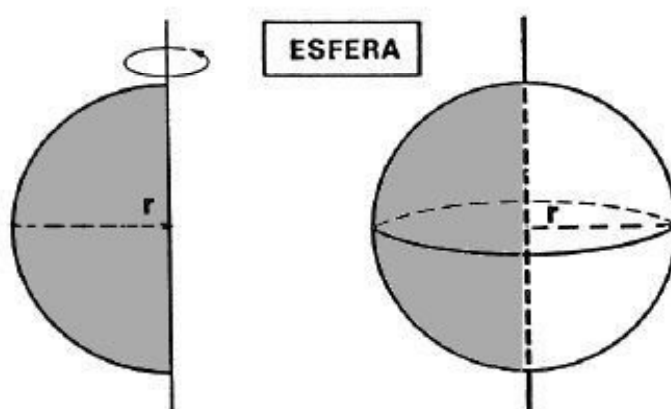


Figura 11

L'**esfera** es genera en girar una semicircumferència al voltant d'un diàmetre. Veieu la figura 12.

Figura 12



1. ÀREES DE FIGURES A L'ESPAI

1.1 ÀREA LATERAL I ÀREA TOTAL DEL PRISMA

Observarem la figura 1 que presenta un prisma pentagonal recte com exemple per calcular les àrees lateral i total d'un prisma qualsevol.

En el desenvolupament del prisma s'observa que les cares laterals formen un rectangle que té el costat més gran **AB**. La longitud d'aquest és igual que el perímetre de la base del prisma. D'altra banda, l'altura **h** del rectangle és igual a l'altura del prisma. Per tant, l'àrea lateral (**Al**) del prisma és igual al producte del perímetre de la base (**p**) per l'altura (**h**).

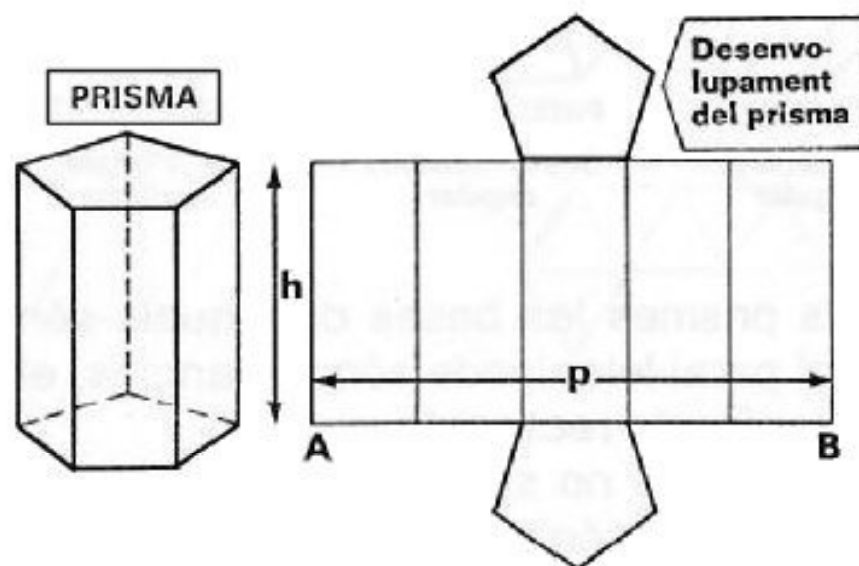


Figura 1

$$\begin{aligned} Al &= p \times h \\ At &= Al + 2 \cdot \text{àrea de la base} \end{aligned}$$

Per cert, l'àrea total, A_t , és l'àrea lateral, A_l , més l'àrea de les dues bases.

Calculem les àrees de l'**ortòedre**(**paralelepípede rectangle**) i de l'**hexàedre**(**cub**).

Les àrees totals són indicades a les figures 2 i 3. Deixem al lector que calculi les respectives àrees laterals :

Figura 2

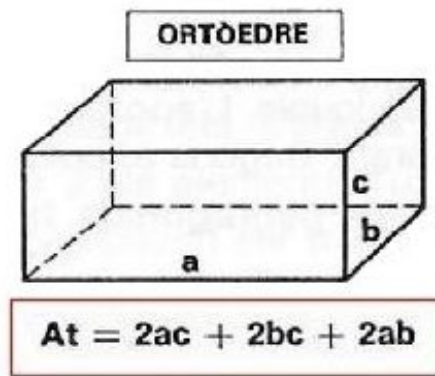
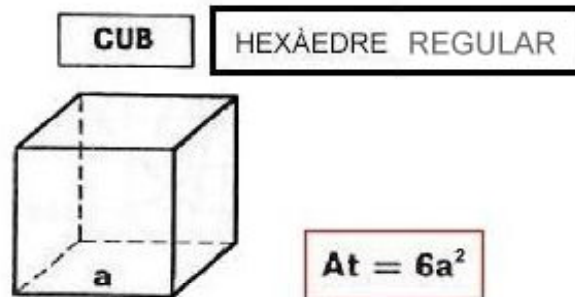


Figura 3



1.2 ÀREA LATERAL I ÀREA TOTAL DE LA PIRÀMIDE

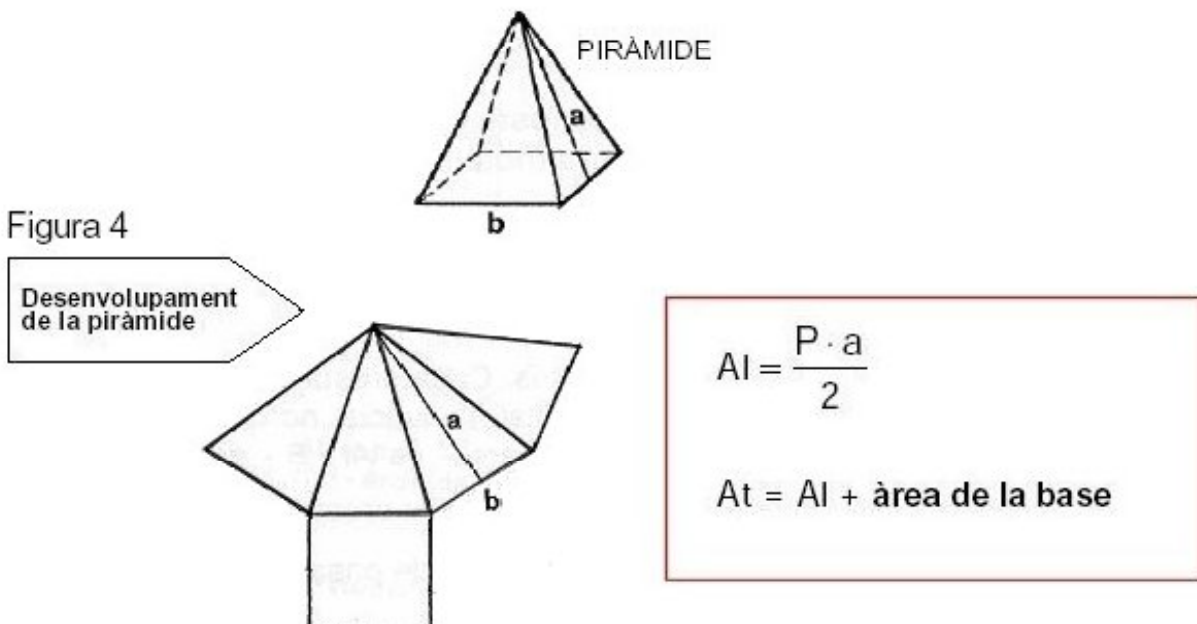
Àrea lateral d'una piràmide és la suma de les àrees de les cares laterals. Observem a la figura 4 el desenvolupament de la piràmide quadrangular. L'àrea lateral és la suma de les àrees dels quatre triangles isòscels. L'àrea d'un triangle és:

$$\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{b \cdot a}{2}$$

on **b** és la base i **a** és l'altura d'una de les cares laterals qualsevol, és a dir, l'**apote-
ma** de la piràmide. Si hi ha **n** triangles, l'àrea lateral serà:

$Al = \frac{b \cdot a}{2} \cdot n = \frac{(b \cdot n) \cdot a}{2} = \frac{P \cdot a}{2}$ on **P** és el perímetre de la base. L'àrea total és la suma de l'àrea lateral i l'àrea de la base.

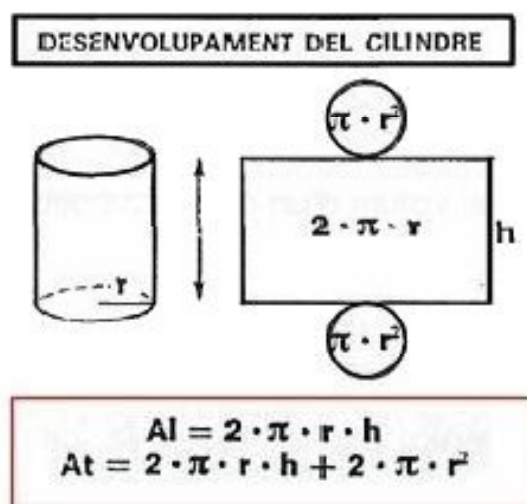
Figura 4



1.3 ÀREA LATERAL I ÀREA TOTAL DEL CILINDRE I EL CON

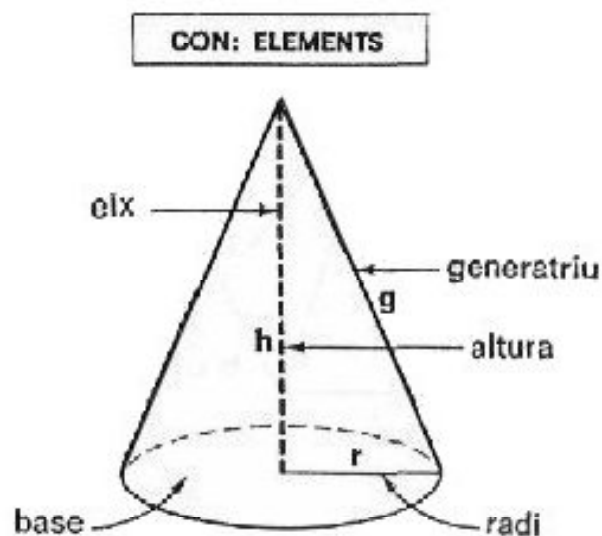
Si observem el desenvolupament del cilindre de la figura 5 veurem que l'àrea lateral és un rectangle el qual té per base la longitud de la circumferència de la base i per altura la generatriu.

Figura 5

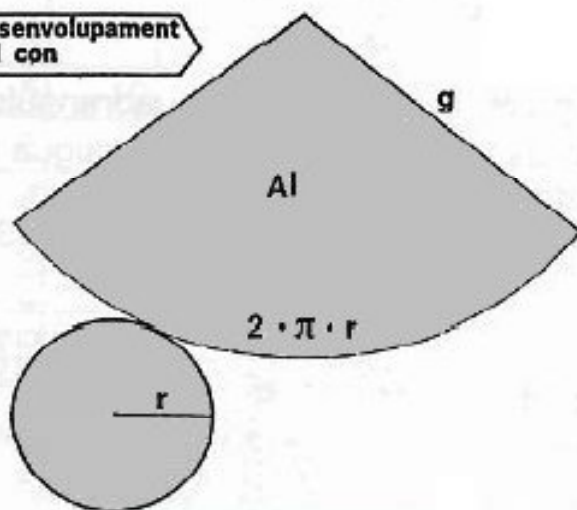


Recordem els elements del con, ja estudiats abans.

Observem a la figura 6 que la superfície lateral del con es transforma en un sector circular. Per tant, l'àrea lateral del con és l'àrea del sector circular corresponent. La longitud de l'arc és la longitud de la circumferència de la base, i el radi del sector circular és la generatriu del con. Deduïm l'àrea lateral a la mateixa figura. També l'àrea total és fàcilment calculable a partir de la suma de la lateral i la de la base.

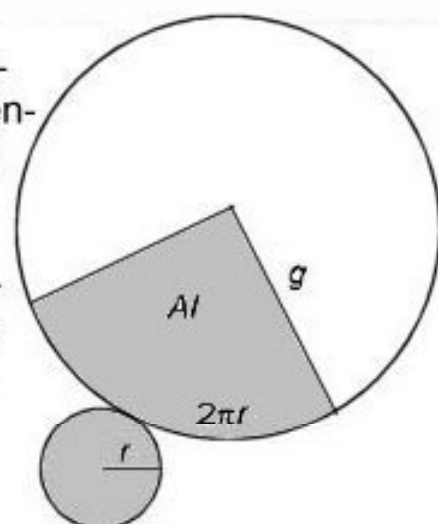


Desenvolupament
del con



$$\begin{aligned} Al &= \pi \cdot r \cdot g \\ At &= Al + \pi \cdot r^2 \end{aligned}$$

Establim una
relació de pro-
porcionalitat en-
tre les àrees i
les longituds
dels arcs o
de les circum-
ferències que
les envolten.

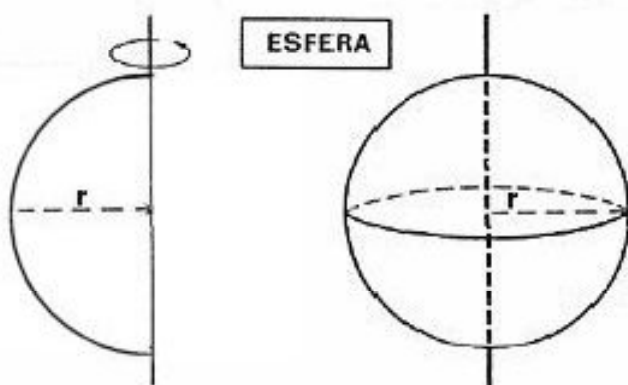


$$\frac{Al}{2\pi r} = \frac{\pi g^2}{2\pi g} \Rightarrow Al = \pi r g$$

La relació entre àrees i arcs de circumferències a la figura anterior queda explicada si pensem que el sector circular de radi g , resultant del desenvolupament del con, abasta un arc de longitud igual a la longitud de la circumferència de la base i que ha d'existir una relació de proporcionalitat directa entre aquesta superfície i la longitud de l'arc abastada.

Es pot provar que l'àrea de la superfície esfèrica de radi r és igual a quatre vegades l'àrea d'un dels seus cercles màxims o equador tal com s'observa a la figura 7.

ESFERA



$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$