1. UNITATS D'ÀREA

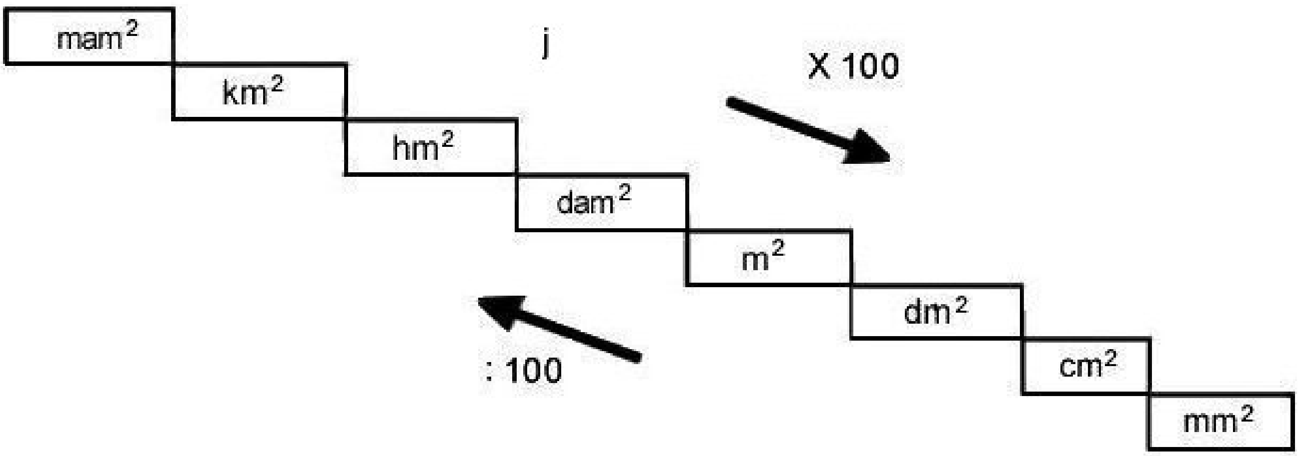
L'àrea d'una figura és la mesura de la seva superfície.
La superfície d'una figura és sempre la mateixa, però la seva àrea depèn de la unitat de superfície que hem triat.
La principal unitat de superfície és el **metre quadrat (m^2),** que és la superfície d'un quadrat d'un metre de costat.
També es poden fer servir els múltiples i submúltiples següents (les unitats estan ordenades de major a menor):

- **miriàmetre quadrat (mam^2) = 100 000 000 m^2**
- **quilòmetre quadrat (km^2) = 1 000 000 m^2**
- **hectòmetre quadrat (hm^2) = 10 000 m^2**
- **decàmetre quadrat (dam^2) = 100 m^2**

múltiples

- **decímetre quadrat (dm^2) = 0,01 m^2 = 1/100 m^2**
- **centímetre quadrat (cm^2) = 0,0001 m^2 = 1/10 000 m^2**
- **mil·límetre quadrat (mm^2) = 0,000001 m^2 = 1/1 000 000 m^2**

submúltiples

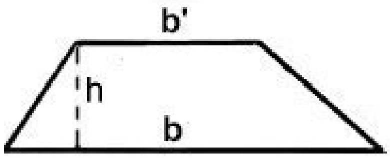


Cada unitat de superfície és 100 vegades més gran que la immediata inferior i 100 vegades més petita que la immediata superior.

Unes altres unitats de superfície, les unitats agràries, són:

• hectàrea (ha)	**• àrea (a)**	**• centiàrea (ca)**
1 ha = 100 a	1 a = 100 ca	
1 ha = 1 hm^2	1 a = 1 dam^2	1 ca = 1 m^2

S'ha d'anar amb compte amb les unitats de mesura. Per poder trobar l'àrea de qualsevol figura s'han d'expressar totes les dimensions corresponents en les mateixes unitats de longitud, és a dir, si es vol expressar l'àrea d'una figura en centímetres quadrats, s'hauran de tenir totes les dimensions d'aquesta en centímetres.
Per exemple, volem trobar l'àrea en centímetres quadrats d'un trapezi que té 1,8 dm de base major, 0,1 m de base menor i alçada de 6 cm.



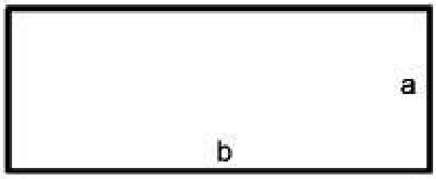
La fórmula és: $A = \dfrac{b + b'}{2} \cdot h$

Primer, expressem totes les mesures en una mateixa unitat: el centímetre, per exemple.
b = 1,8 dm = 18 cm, **b'**= 0,1 m = 10 cm

$$A = \frac{18\text{ cm} + 10\text{ cm}}{2} \cdot 6\text{ cm} = \frac{28\text{ cm}}{2} \cdot 6\text{ cm} = 14 \cdot 6\text{ cm}^2 = 84\text{ cm}^2$$

1. ÀREES DE FIGURES PLANES

RECTANGLE



Àrea = base x altura

$$\boxed{A = b \cdot a}$$

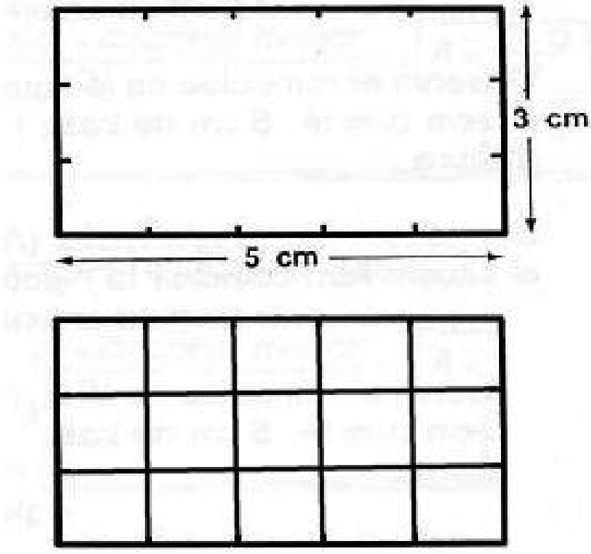
Comprovarem la fórmula anterior:

Observa aquest rectangle: té 5 cm de llarg i 3 cm d'ample.

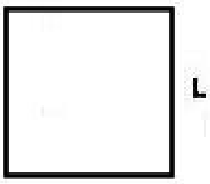
El quadriculem traçant paral·leles als costats pels punts que indiquen els centímetres: cadascun dels quadrats que obtenim és 1 cm^2.

Comptem els quadrats obtinguts i veiem que n'hi ha 15, per tant, l'àrea del rectangle (suma de les àrees dels quadrats) és 15 cm^2.

Si apliquem la fórmula arribem al mateix resultat: $A = 5\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 15\text{ cm}^2$.



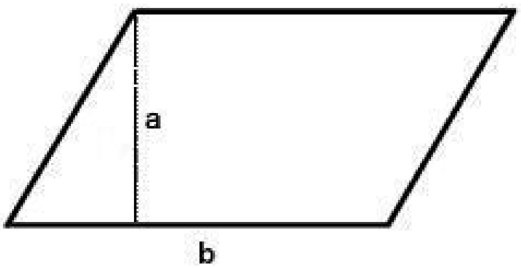
QUADRAT



$$\boxed{\text{Àrea} = L \cdot L = L^2}$$

Es tracta de la fórmula del rectangle però, en aquest cas, els dos costats tenen la mateixa longitud.

ROMBOIDE



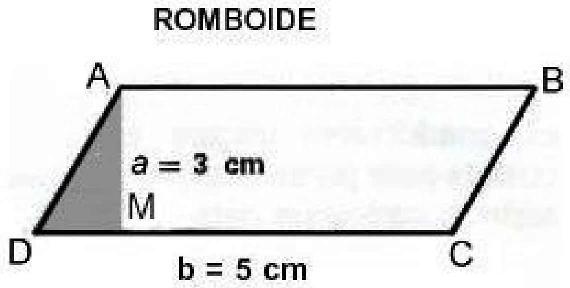
Àrea = base x altura

$$\boxed{A = b \cdot a}$$

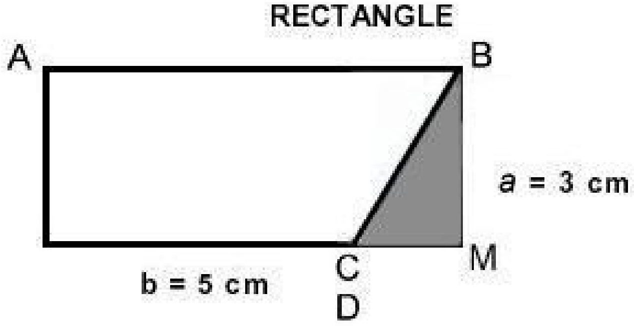
L'àrea d'un romboide, o d'un paral·lelogram qualsevol, es pot trobar amb la mateixa fórmula del rectangle.

Comprovarem la fórmula anterior:

Observa el romboide de la figura: suposem que té 5 cm de base i 3 cm d'altura.



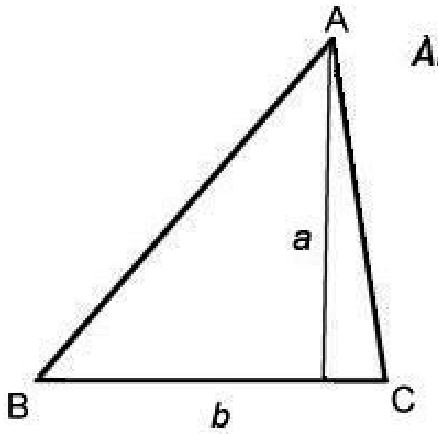
Si retallem el triangle ratllat (ADM) i el situem fent coincidir la hipotenusa AD amb el costat BC del paral·lelogram, obtenim un rectangle de la mateixa base i la mateixa altura que el romboide.



Per tant, les àrees del rectangle i del romboide són iguals:

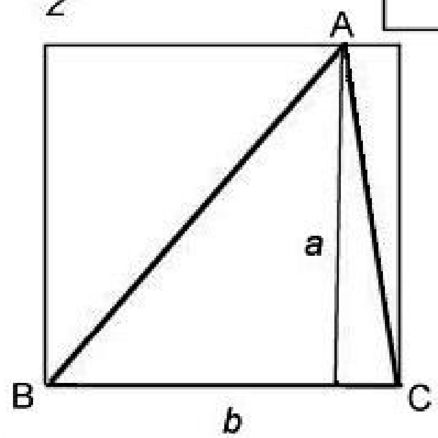
$A = 5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$.

TRIANGLE



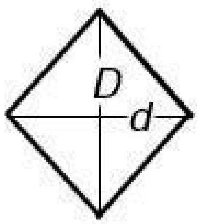
$$\text{Àrea} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{b \cdot a}{2}}$$



És la meitat de l'àrea del paral·lelogram. Efectivament, si tracem línies paral·leles: una a la base pel vèrtex oposat a aquesta (A) i les altres paral·leles a l'altura, pels vèrtexs de la base (B i C), obtenim quatre triangles iguals dos a dos, de manera que els dos triangles diferents formen el triangle ABC i amb la mateixa base i la mateixa altura que el paral·lelogram.

ROMBE



$$\text{Àrea} = \frac{\text{diagonal major} \times \text{diagonal menor}}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Efectivament:
Les dues diagonals divideixen el rombe en quatre triangles rectangles iguals.

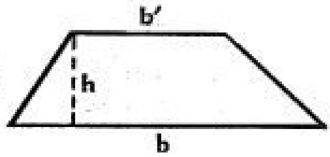
A cada triangle els catets són $\frac{D}{2}$ i $\frac{d}{2}$.

L'àrea de cada triangle, segons hem vist, és $\dfrac{\dfrac{D}{2}\cdot\dfrac{d}{2}}{2} = \dfrac{D \cdot d}{8}$

L'àrea del rombe s'obté multiplicant per 4 l'àrea d'un dels triangles, és a dir:

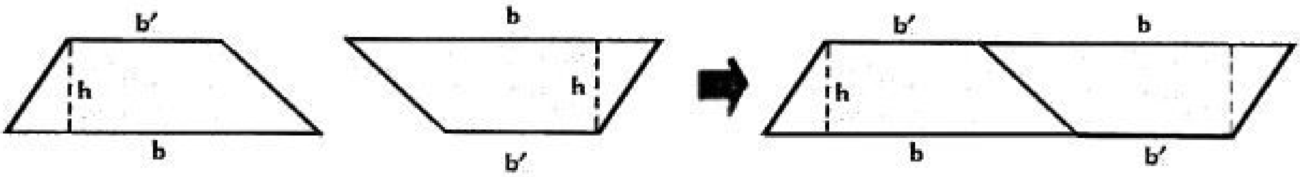
$$\textit{Àrea} = 4 \cdot \frac{D \cdot d}{8} = \frac{D \cdot d}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{D \cdot d}{2}}$$

TRAPEZI

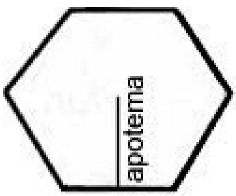


$$\textit{Àrea} = \frac{\textit{base major + base menor}}{2} \textit{ x altura} \Rightarrow \boxed{A = \frac{b+b'}{2} \cdot h}$$

Efectivament: amb dos trapezis iguals podem formar un romboide i, per tant, l'àrea del trapezi serà la meitat de l'àrea del romboide obtingut:

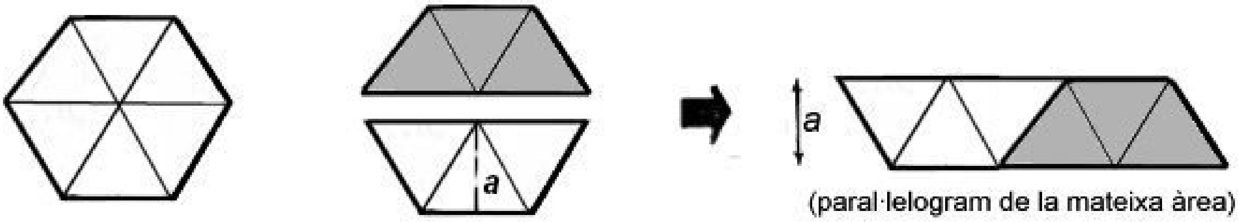


POLÍGON REGULAR
(per exemple, un hexàgon)



$$\textit{Àrea} = \frac{\textit{perímetre x apotema}}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{P \cdot a}{2}}$$

Efectivament: podem descompondre qualsevol polígon regular en triangles, a cadascun dels quals l'altura és l'apotema del polígon.
A la figura, per exemple, veiem com es pot transformar un hexàgon regular en sis triangles equilàters iguals i, després, formar un paral·lelogram la base del qual seria tres costats dels triangles (igual a la meitat del perímetre del polígon) i l'altura igual a l'apotema:

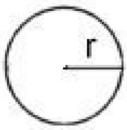


(paral·lelogram de la mateixa àrea)

Àrea del polígon = àrea del paral·lelogram $= \dfrac{P}{2} \cdot a$, on P és el perímetre i a l'apotema.

En altres polígons regulars, com pentàgons, etc, no es pot construir aquest paral·lelogram amb tanta facilitat. Per a l'hexàgon es veu fàcilment, com heu comprovat. La fórmula de l'àrea val per a tots.

CERCLE



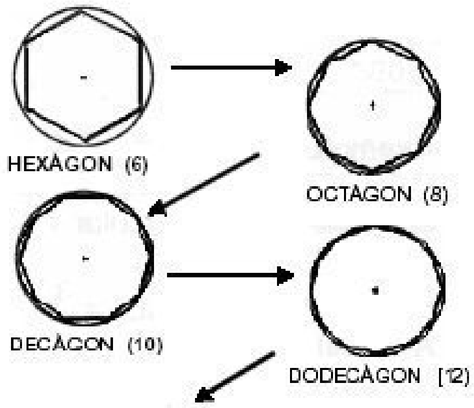
$$\text{Àrea} = \pi \cdot \text{radi}^2 \Rightarrow \boxed{A = \pi \cdot r^2}$$

Podem deduir aquesta fórmula a partir de l'anterior:

Considerem els polígons regulars inscrits en una circumferència.

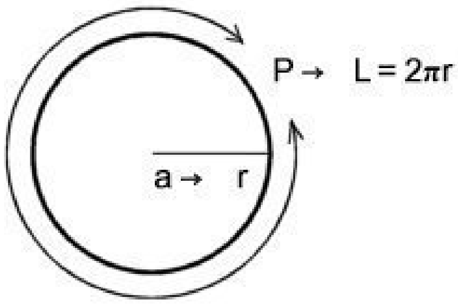
Es pot observar que com més gran sigui el nombre de costats del polígon més s'aproximarà la seva àrea a l'àrea del cercle.

Ens podem imaginar la circumferència com un polígon de molts costats i, llavors, el perímetre serà la longitud de la circumferència i l'apotema serà el radi:

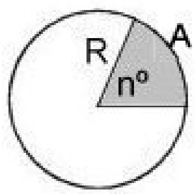


$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} P \to \quad L = 2\pi r \\ a \to \quad r \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{L \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$



SECTOR CIRCULAR



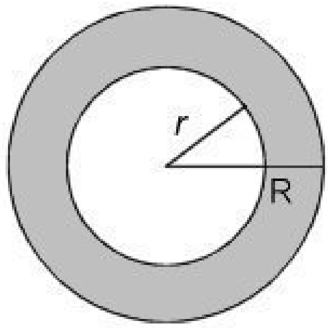
El mateix que en el càlcul de la longitud d'un sector circular hi ha una relació de proporcionalitat directa entre l'angle del sector i l'àrea de la superfície que abasta:

$$\frac{A}{n^\circ} = \frac{\pi \cdot R^2}{360^\circ} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot n^\circ}{360^\circ}$$

CORONA CIRCULAR

Una corona circular és la porció de pla compresa entre dues circumferències concèntriques.

L'àrea és la diferència entre les àrees dels dos cercles corresponents a cada circumferència:



$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

2. EXEMPLES DE CONVERSIONS AMB UNITATS D'ÀREA I CÀLCUL D'ÀREES DE FIGURES PLANES ELEMENTALS

1. Passeu el complex 6 hm^2 18 dam^2 5 dm^2 a incomplex , expressant-ho en dm^2.

SOL.:

mam^2	km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
		06	18	00	05		

És 6 180 005 dm^2

2. Passeu d'incomplex a complex: 472,0685 hm^2

SOL.:

mam^2	km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
	04	72	06	85			

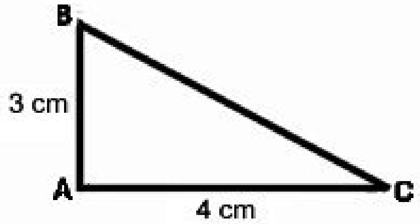
Per tant és: 4 km^2 72 hm^2 6 dam^2 85 m^2

3. Calculeu l'àrea d'un triangle rectangle els catets del qual mesuren 3 cm i 4 cm.

SOL.:

Es pot prendre com a base qualsevol dels catets i com a altura l'altre per tant:

$$A = \frac{4\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}}{2} = \frac{12\text{ cm}^2}{2} = 6\text{ cm}^2$$



4. Busqueu l'àrea d'un rombe les diagonals del qual són **D** = 8 hm i **d** = 60 dam.

SOL.:

Primer, expressarem les mides de les diagonals en la mateixa unitat d'àrea: per exemple, l'hectòmetre quadrat.

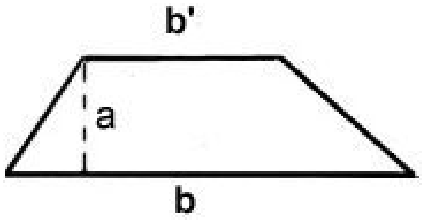
d = 60 dam = 6 hm. Així, $A = \frac{8\text{ hm} \cdot 6\text{ hm}}{2} = \frac{48\text{ hm}^2}{2} = 24\text{ hm}^2$

5. Trobarem l'àrea d'un trapezi a partir de les dades següents: **b** = 1,8 dm, **b'** = 0,1 m i **a** = 6 cm.

SOL.:

Primer, expressem totes les mesures en una mateixa unitat: el centímetre, per exemple.
b = 1,8 dm = 18 cm
b'= 0,1 m = 10 cm

$$A = \frac{(18\,\text{cm} + 10\,\text{cm})\,6\,\text{cm}}{2} = 84\ \text{cm}^2$$



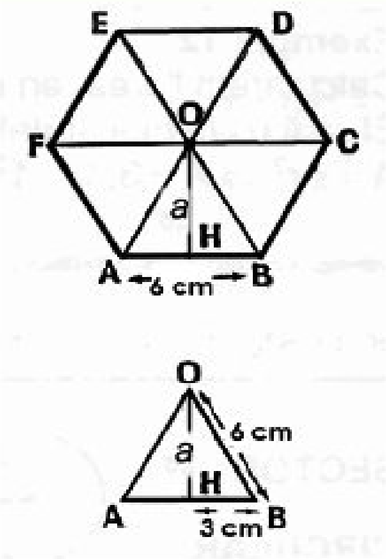
6. Sabem que un costat d'un hexàgon regular té 6 cm de longitud. ¿Quant val l'àrea?

SOL.:
Perímetre: $\boldsymbol{p} = 6 \cdot 6\ \text{cm} = 36\ \text{cm}$

Trobarem l'apotema en aplicar el teorema de Pitàgores:

$$a = \overline{OH} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{HB}^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 5,2\ \text{cm}$$

$$A = \frac{36\,\text{cm} \cdot 5,2\,\text{cm}}{2} = 93,6\ \text{cm}^2$$



7. Calculeu l'àrea, en metres quadrats, d'un cercle de 2 dm de diàmetre.

SOL.:
El radi és la meitat del diàmetre, és a dir, 1 dm.

$$A = \pi\, r^2 \Rightarrow A = 3,14 \cdot 1^2\ \text{dm}^2 = 3,14\ \text{dm}^2 = 3,14\ \frac{\text{m}^2}{100} =$$

$$= 0,0314\ \text{m}^2$$