1. EL TEOREMA DE PITÀGORES: ENUNCIAT I DEMOSTRACIÓ

Aproximadament un segle després de Tales, Pitàgores va descobrir, entre altres coses, un Teorema que el va fer famós. El Teorema de Pitàgores consisteix en *una regla que permet calcular un costat d'un triangle* ***rectangle*** *quan coneixes els altres dos* (Para especial atenció a que *només serveix per als triangles rectangles!*).

Ara i, per entendre'l "a la primera", recorda com anomenava Pitàgores els costats del triangle rectangle: hipotenusa, el costat més gran, i catets els altres dos.

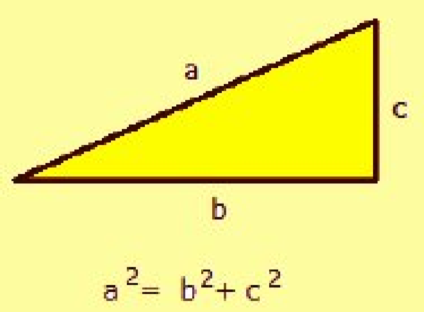
Teorema de Pitàgores

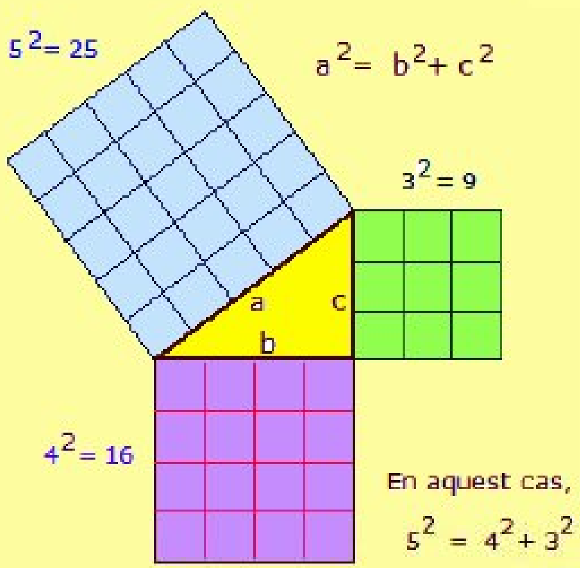
Els costats de qualsevol triangle rectangle d'hipotenusa *a* i catets *b* i *c* compleixen la fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2$$ (figura 1)

(És a dir: El resultat d'elevar al quadrat el valor de la hipotenusa coincideix amb el que sumen els quadrats dels valors dels catets)

Geomètricament, el teorema es pot interpretar dient que "L'àrea del quadrat construït sobre la hipotenusa és la suma de les àrees dels quadrats construïts sobre els catets" (figura 2).





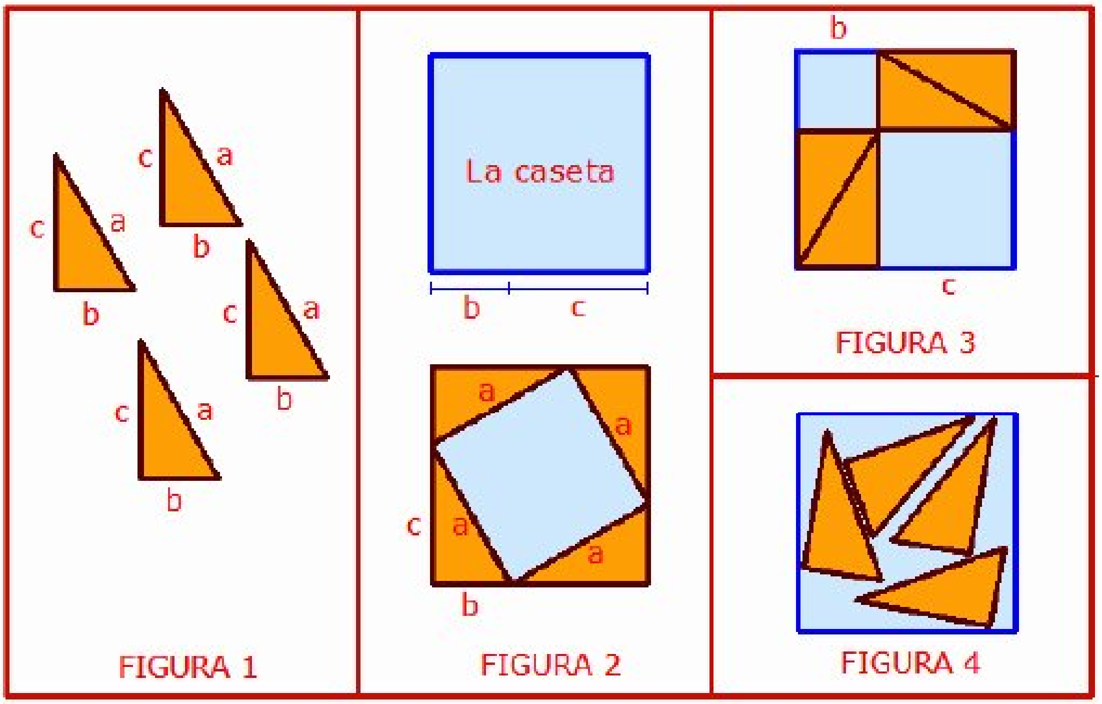
Demostracions del Teorema de Pitàgores

Actualment es coneixen quasi 365 demostracions diferents d'aquest Teorema. Et convé conèixer almenys una: T'ajudarà a entendre'l i a aplicar-lo correctament.

Una ben senzilla és la que ara t'explico com si fos un conte infantil. Aquest és, doncs, *el conte dels quatre triangles rectangles iguals, i la caseta del bosc:*

☞ Hi havia una vegada quatre triangles rectangles iguals, amb catets *b* i *c*, i hipotenusa *a* (figura 1 de la pàgina següent), que vivien en una petita caseta del bosc, quadrada, sense mobles i, tan justeta, que, a l'hora de dormir

- o bé dormien separats, fent rotllana, tal com es veu a la figura 2 (els peus de l'un tocant el cap de l'altre... Poc higiènic!)
- o bé dormien ben junts, per parelles, com a la figura 3
- o bé dormien com els venia en gana, que són prou lliures de fer-ho (fig. 4)



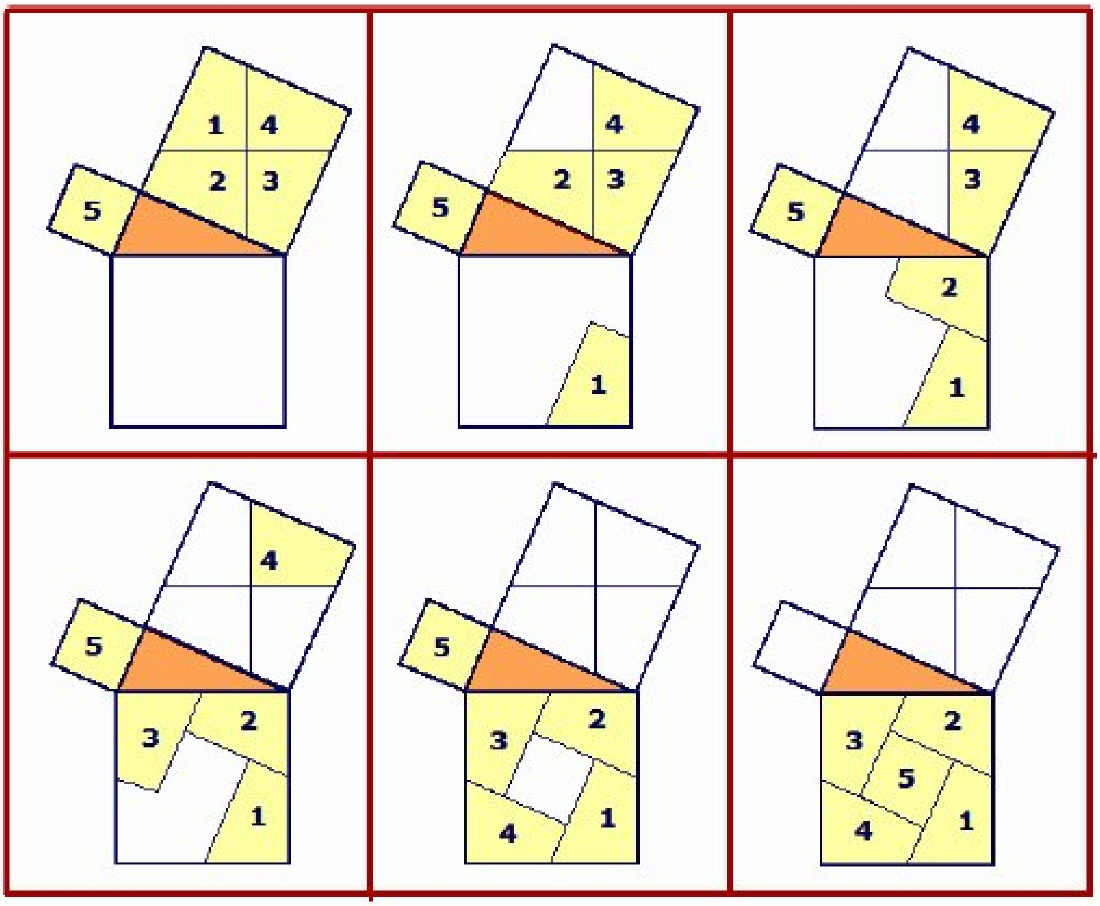
En qualsevol cas, la part que queda lliure del terra de la caseta per força ha de tenir la mateixa superfície (o àrea) en tots els casos, sense importar quina disposició adoptin. I, com que l'àrea d'un quadrat s'obté multiplicant el seu costat per ell mateix, és a dir, elevant el costat al quadrat, convindràs que:

en la figura 2, la part lliure de l'habitació és un quadrat d'àrea a^2

i en la figura 3, la part lliure la formen dos quadrats d'àrees b^2 i c^2

i s'ha de complir $a^2 = b^2 + c^2$ (*el quadrat construït sobre la hipotenusa és la suma dels quadrats construïts sobre els catets*)... i ja està demostrat!

Ara mira aquesta mena de trencaclosques que permet constatar també perquè el quadrat sobre la hipotenusa és la suma dels quadrats construïts sobre els catets:



A la portada de la pàgina http://xtec.cat/~fgonzal2/frames1024.htm trobaràs una versió animada de la primera demostració feta aquí. Visita-la i busca també a Curiositats/Pitàgores: Veuràs una petita biografia de Pitàgores i dues demostracions més del Teorema.

2. COM S'APLICA EL TEOREMA DE PITÀGORES. IMPORTÀNCIA.

Nombre	Quadrat	Nombre	Arrel
1	$1^2 = 1$	1	$\sqrt{1} = 1$
2	$2^2 = 4$	4	$\sqrt{4} = 2$
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13	$13^2 = 169$	169	$\sqrt{169} = 13$
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20	$20^2 = 400$	400	$\sqrt{400} = 20$

Previ

Suposo que saps quina operació és l'arrel quadrada i com es fa amb calculadora. Però també aniria bé que aprenguessis de memòria els quadrats del vint primers nombres.

Completa la taula de la dreta (Pots usar calculadora), ja sigui aquí mateix o amb un quadern o full a part.

I observa que cada quadrat s'obté sumant al quadrat anterior el doble més u de la base de l'anterior.

Per exemple:

$11^2 = 10^2 + 21 = 100 + 21 = 121$

on 21 és el doble més u de 10 (base del quadrat anterior)

$12^2 = 11^2 + 23 = 121 + 23 = 144$, etc.

Això permet seguir dient "de memòria" la llista, especialment a partir de 10^2 (Que no és memòria, sinó càlcul... I, si l'entrenes força, veuràs que pots batre rècords de velocitat).

Aplicació del Teorema

Exemple 1 (Càlcul de la hipotenusa)

Calcula la hipotenusa d'un triangle rectangle els catets del qual tenen 24 i 42 cm.

Fixa't que no necessites un dibuix. Com que saps que s'ha de complir $a^2 = b^2 + c^2$ (*a* hipotenusa, *b* i *c* catets), ja pots veure que *a* surt directament fent $a = \sqrt{b^2 + c^2} =$ $= \sqrt{24^2 + 42^2} = \sqrt{576 + 1764} = \sqrt{2340} = 48'37\text{ cm}$ (Comprova amb la calculadora).

Exemple 2 (Càlcul d'un catet)

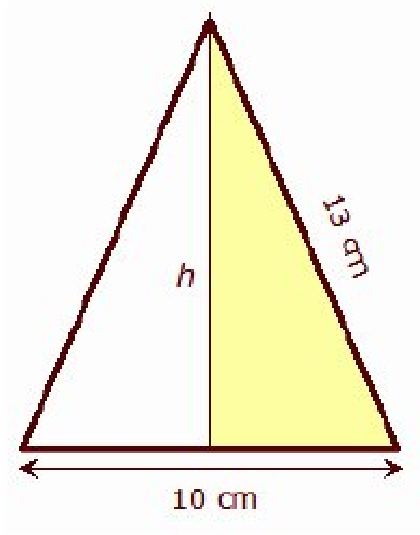
Troba l'altre catet d'un triangle rectangle d'hipotenusa 15 cm, i un catet de 9 cm.

Igualment, com que s'ha de complir $a^2 = b^2 + c^2$ (*a* hipotenusa, *b* i *c* catets) i ara es tracta de trobar un catet (per exemple, c) primer considerarem que $c^2 = a^2 - b^2$ i farem, doncs, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12\text{ cm}$ (Si havies entrenat el que hem dit abans, ara hauràs pogut fer mentalment els càlculs).

Exemple 3 (Aplicació del Teorema de Pitàgores a altres figures que no són triangles rectangles)

Calcula l'altura sobre el costat desigual d'un triangle isòsceles que té perímetre 36 cm, sabent que el seu costat desigual té 10 cm.

En primer lloc, has d'interpretar l'enunciat fent un dibuix de la situació que planteja. Està fet a la dreta.



El perímetre és la suma dels tres costats. Si ha de ser de 36 cm i el costat desigual fa 10 cm, es dedueix que els costats iguals sumen 36 – 10 = 26 cm. Llavors, cada costat té 26:2 = 13 cm.

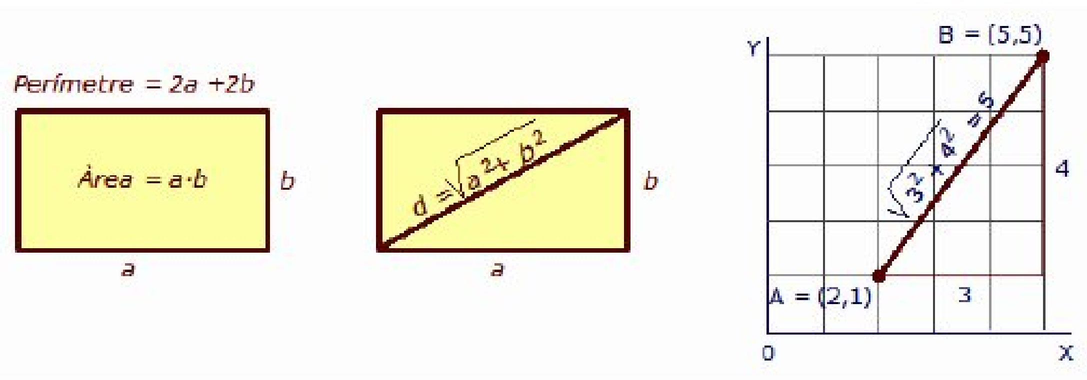
El triangle no és rectangle, no li podem aplicar Pitàgores: A ell no, però al triangle que es forma en dibuixar justament la altura, *h*, que ens demanen, sí que li podem aplicar Pitàgores perquè és rectangle; té hipotenusa 13 i catet menor 10:2 = 5.

I surt $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ cm.

3. UTILITAT DEL TEOREMA DE PITÀGORES: UN APUNT.

Fins ara sabies que, coneixent els costats d'un rectangle, es pot calcular el perímetre i l'àrea amb fórmules elementals (T'ho recorda la primera figura de sota). Es pot dir que Pitàgores va afegir una fórmula per calcular la diagonal (2a figura).

Aquesta aparentment senzilla aportació té una gran importància: "Pitàgores va tirar pel camí del mig (diagonal i/o hipotenusa) i va donar la fórmula per calcular-lo".



Finalment hem representat els punts de coordenades A = (2,1) i B = (5,5). Podem anar del punt A al B desplaçant-nos 3 unitats horitzontalment i 4 verticalment; però, seguint la diagonal (camí més curt!) hem de recórrer $\textit{distància}(A,B) = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ (Pitàgores!), o sigui, "5 vegades el que fa el costat del quadre" (Comprova que la diagonal equival a l'amplada de cinc quadres!).

Activitats interactives

Pots repassar i practicar la utilització del Teorema visitant la ja coneguda pàgina

http://www.edu365.com/eso/muds/matematiques/index.htm#

on faries bé en mirar-te la "pregunta amb resposta" anomenada *Què diuen els teoremes de Pitàgores, dels catets i de l'altura?* (Però només el de Pitàgores, eh?)

Després vas al paquet d'activitats de Geoclic nº 27 i fas només les quatre primeres!

1. RAÓ DE SEGMENTS. SEGMENTS PROPORCIONALS.

Concepte general de raó

La raó de dos valors d'una mateixa magnitud és el seu quocient, i representa quantes vegades el primer valor conté el segon (o, cas que el resultat sigui una fracció o part d'una unitat, quina part del segon valor representa el primer).

Per exemple, si dues persones cobren sous respectius de 3000 € i 1500 €, de seguida es veu que la primera cobra el doble que la segona (o que la segona cobra la meitat que la primera). I, efectivament, en fer els quocients, tenim

$$\frac{\text{sou 1a}}{\text{sou 2a}} = \frac{3000€}{1500€} = 2 \text{ (sense unitats)} \rightarrow \text{el primer sou és el doble del segon}$$

$$\frac{\text{sou 2a}}{\text{sou 1a}} = \frac{1500€}{3000€} = \frac{1}{2} = 0'5 \text{ (sense unitats)} \rightarrow \text{un sou és la meitat de l'altre}$$

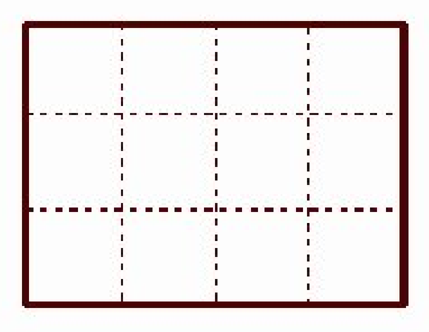
Raó de dos segments

La raó de dos segments expressa quantes vegades l'un conté l'altre, i es pot obtenir mesurant-los en la mateixa unitat i dividint les seves longituds.

Si es canvia l'ordre dels segments en fer la raó, surt la raó inversa.

De vegades, però, es tenen dades per saber quina és la raó de dos segments sense haver de mesurar-los. Per exemple, si ens diuen que les "rajoles" que formen el rectangle de la figura són quadrades, és evident que la raó dels seus costats és 3/4 = 0'75 o 4/3 = 1'333..., segons en quin ordre s'agafin.

Si vols agafar un regle, mesurar-los i comprovar que surten aquestes raons, tu mateix/a.



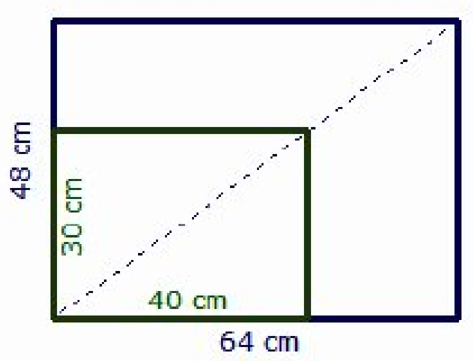
Proporcions

Una proporció és la igualtat de dues o més raons.

Com a exemple, seguint amb les pantalles de televisor format 4:3, sabem que les dues pantalles de la figura adjunta (situades "sobre una mateixa diagonal") compliran la proporció

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{BC'} = \frac{4}{3}$$

que surt de $\frac{AB}{BC} = \frac{40\text{ cm}}{30\text{ cm}} = \frac{4}{3}$ i $\frac{AB'}{BC'} = \frac{64\text{ cm}}{48\text{ cm}} = \frac{4}{3}$



Comprovació "ràpida" d'una proporció

Es pot comprovar si la proporció $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ és certa veient si els dos quocients donen el mateix resultat, o bé podem fer els productes a·d i b·c i veure si coincideixen.,

És a dir, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si, i només si, $a \cdot d = b \cdot c$

Així, a la proporció $\frac{40}{30} = \frac{64}{48}$, certament es compleix $40 \cdot 48 = 1920 = 30 \cdot 64$.

Proporcions obtingudes en intercanviar mitjos o extrems

A la proporció $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, a i d s'anomenen *extrems*, b i c s'anomenen *mitjos*. Suposant que aquesta proporció és certa, també ho són les que resulten d'intercanviar mitjos o extrems: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ i $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$

Exemples: $\frac{40}{30}=\frac{64}{48}=1'333....$ i $\frac{40}{64}=\frac{30}{48}=0'625$ i $\frac{48}{30}=\frac{64}{40}=1'6$

Exemple 1 (Exercici resolt)

Expressa la raó de dos segments, de longituds respectives 3'96 m i 1'10 m, en forma decimal. Digues altres dos segments que tinguin la mateixa raó.

La raó del gran al petit és $\frac{3'96\text{ m}}{1'10\text{ m}}=\frac{396}{110}=3'6$ (i no té unitats). Altres dos que tindrien la mateixa raó podrien ser segments de 36 cm i 10 cm.

Exemple 2 (Exercici resolt)

La raó de dos segment és 2'4 i el major té 84 cm. Quant mesura el menor?

Com que la raó 2'4 és major que 1, ha de ser el resultat de dividir el major (84) pel menor (***x***), així que escriurem $\frac{84}{x}=2'4$. Llavors, $84 = 2'4\cdot x$ i $x=\frac{84}{2'4}=35$ cm.

Exemple 3 (Qüestió resolta)

Com s'interpreta que la raó de dos segments AB i CD sigui 0'25 i quina serà la raó de CD a AB?

Vist que $0'25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$ s'interpreta com que el segment AB és la quarta part del segment CD. Llavors CD serà el quàdruple de AB i la raó de CD a AB serà la inversa, 4, que significa que CD és el quàdruple de AB.

Exemple 4 (Exercici resolt)

Si el segments a = 72 cm i b = 117 cm són proporcionals a c = 40 cm i d, calcula raonadament la longitud d'aquest últim.

L'enunciat significa que $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (També podríem escriure $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$). Posem, doncs,

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \rightarrow \frac{72}{40}=\frac{117}{d}$, i d'aquí surt $72\cdot d = 40\cdot 117 = 4680$ i d = 4680/72 = 65 cm

(Comprova que surt el mateix si fas servir l'altra proporció).

Exemple 5 (Exercici quasi resolt)

Els quatre segments a = 28, b = 35, c = 17'5 , d = 42 són proporcionals a m = 20, n, p i q. Troba raonadament les longituds dels tres últims segments.

L'enunciat significa que $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} = \frac{d}{q}$, és a dir, $\frac{28}{20} = \frac{35}{n} = \frac{17'5}{p} = \frac{42}{q}$.

De la primera proporció, $\frac{28}{20} = \frac{35}{n}$, surt 28·n = 700 i n = 700/28 = 25.

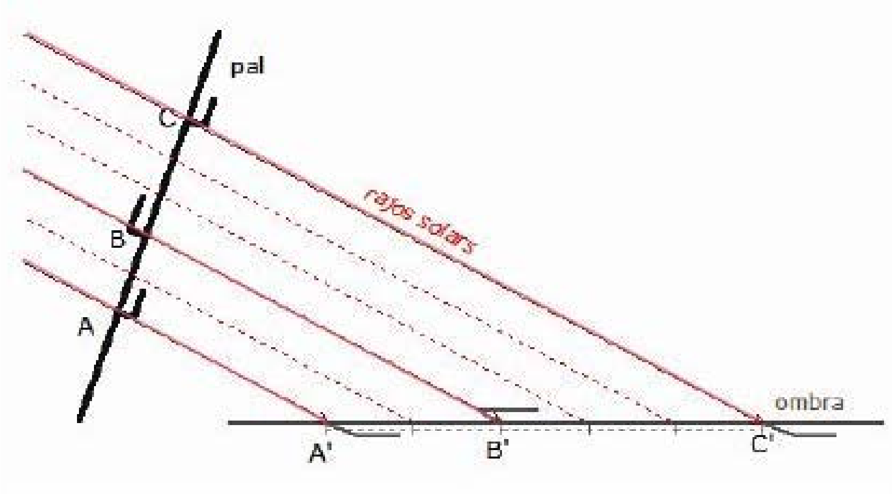
També pots dir: La raó entre 28 i 20 és 28/20 = 1'4 i fer-lo servir per trobar n.

De qualsevol de les dues maneres, comprova que surt p = 12'5 i q = 30.

2. TEOREMA DE TALES

De l'observació de les ombres dels objectes que crea la llum solar, Tales de Milet va treure la idea del seu primer Teorema, que ara t'explico.

Observa el pal, la seva ombra, i les següents proporcions (evidents) entre les distàncies que separen les diferents puntes clavades al pal i les seves ombres.



Claríssimament, $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{2}{3}$, també $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{2}{5}$, també $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} = \frac{3}{5}$.

També cal observar que la proporcionalitat $\frac{\text{1r segment}}{\text{2nsegment}} = \frac{\text{ombra 1r segment}}{\text{ombra 2n segment}}$ es pot substituir per aquesta altra: $\frac{\text{1r segment}}{\text{ombra 1r segment}} = \frac{\text{2n segment}}{\text{ombra 2n segment}}$ (que també és certa). Fins i tot, es pot continuar aquesta última amb més segments, així:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \text{“la raó que sigui”}$$

Això que clarament veus aquí Tales el va enunciar de la següent manera:

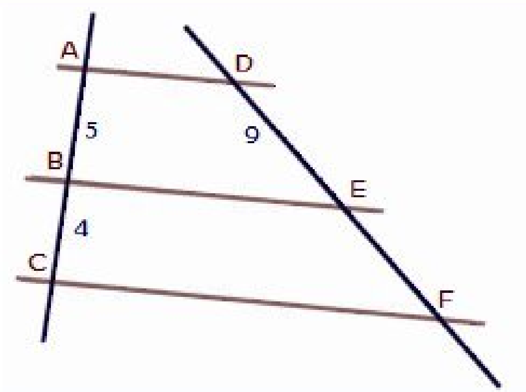
Teorema de Tales

Si un feix de rectes paral·leles (tres o més) tallen altres dues rectes *r* i *r'*, llavors els segments que determinen sobre *r* són proporcionals als segments que determinen sobre *r'* .

Observació: Per refermar la teva comprensió del Teorema, compara el seu enunciat en termes matemàtics amb l'enunciat alternatiu amb termes més "familiars".

Si un feix de rectes paral·leles (tres o més) tallen altres dues rectes r i r', llavors els segments que determinen sobre r són proporcionals als segments que determinen sobre r'.	Si els rajos solars projecten l'ombra d'un objecte recte sobre una superfície plana, llavors les diferents parts de l'objecte recte són proporcionals a les seves ombres.

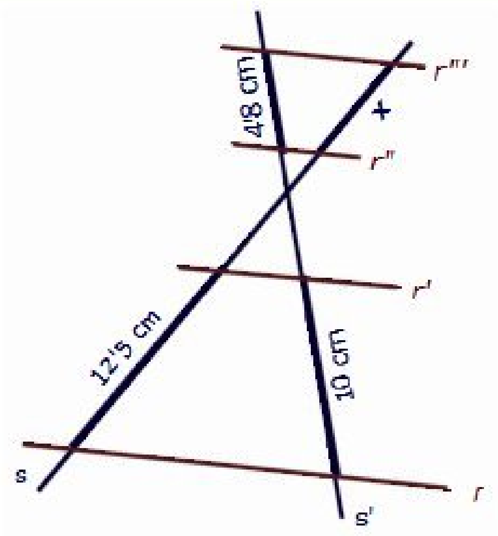
Aplicacions del Teorema de Tales



Exemple 6 (Exercici resolt)

Troba raonadament la longitud del segment EF a la figura, sabent que les rectes AD, BE i CF són paral·leles.

Segons el Teorema de Tales, $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$, o bé, $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$. Amb la segona proporció, per exemple, tenim $\frac{5}{9}=\frac{4}{EF}$ → $5\cdot EF=9\cdot 4$ → $5\cdot EF=36$ → $EF=\frac{36}{5}=7'2$



Exemple 7 (Exercici resolt)

Troba raonadament ***x*** a la figura sabent que les rectes r, r', r'' i r''' són paral·leles.

Aquí "tens una mena d'encreuament" entre les posicions de les rectes que les paral·leles tallen, que fa més difícil aplicar el Teorema.

Cal aparellar correctament els segments sobre *s* amb els segments sobre *s'*, en fer la proporció. Així que... ull viu i fixa-t'hi bé!: L'aparellament correcte és 12'5 i ***x*** d'una banda (segments sobre *s*) i 10 i 4'8 de l'altra banda (segments sobre s'):

$$\frac{12'5}{10}=\frac{x}{4'8} \quad \rightarrow \quad 10\cdot x=4'8\cdot 12'5=60 \quad \rightarrow \quad x=\frac{60}{10}=6 \text{ cm}$$

3. TRIANGLES EN POSICIÓ DE TALES

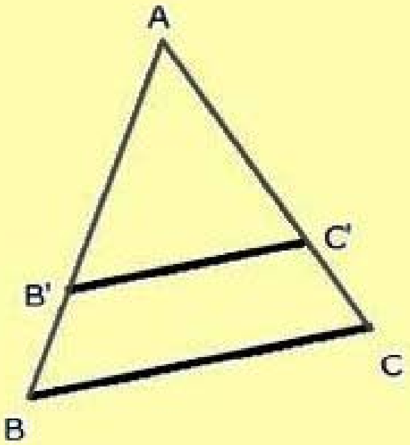
Triangles en posició de Tales

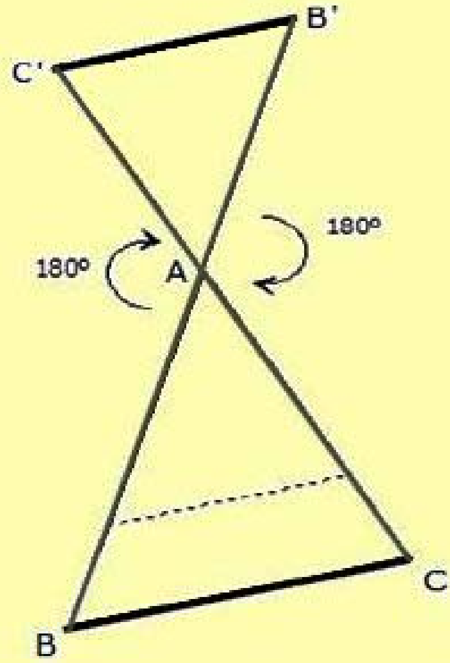
Si en un triangle qualsevol ABC tracem una recta paral·lela al costat BC que talli els costats AB i AC o les seves prolongacions, obtenim un nou triangle AB'C'.

Diem que *els dos triangles ABC i AB'C' estan en posició de Tales*.

Cal saber que *dos triangles en posició de Tales són* semblants, és a dir, que, a més de tenir angles respectivament iguals, tenen tots tres costats proporcionals:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

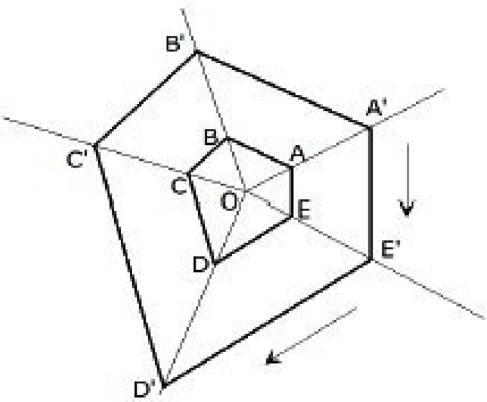




Triangles en posició de Tales "normal" Triangles en posició de Tales "invertida"

Observacions

Recorda que els triangles en posició de Tales formen la figura bàsica d'una teranyina, que ve a ser "una sèrie de triangles en posició de Tales consecutius".

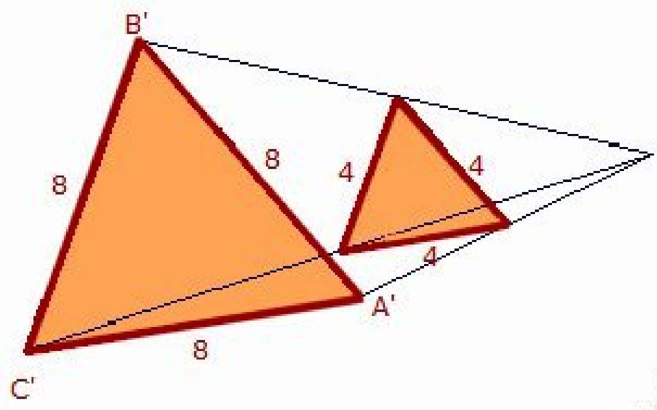


Observa també que la figura que formen els triangles en posició de Tales sembla una A majúscula "tancada". T'has d'acostumar a veure'ls i identificar-los quan apareixen en una figura, ja que sovint hauràs d'aplicar que tinguin costats proporcionals per trobar algun costat que desconeixes i que necessites.

Aquest Teorema sobre triangles en posició de Tales, junt amb el Teorema de Tales, han estat bàsics des de sempre pel treball d'arquitectes, enginyers, geògrafs, etc. Ara és el teu torn de conèixer-los.

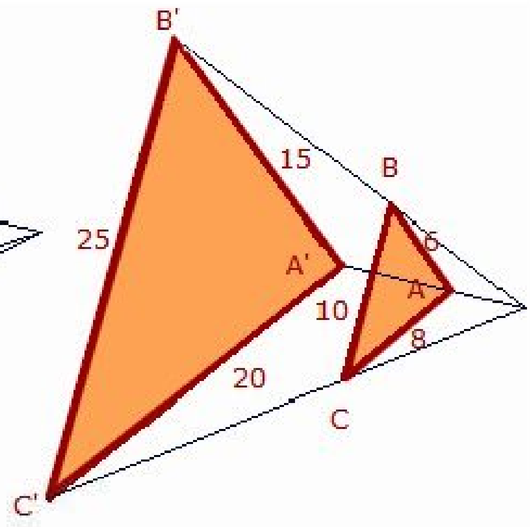
4. SEMBLANÇA DE TRIANGLES

Observa uns exemples gràfics de parelles de triangles semblants. Pots considerar que l'un ha estat obtingut fent una ampliació (o reducció, segons es miri) de l'altre:



Triangles (equilàters) semblants, amb raó de semblança 2:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A'}{CA}=\frac{8}{4}=2$$



Triangles semblants, amb raó de semblança 2,5:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A'}{CA}=2{,}5$$

Una observació elemental: Si els triangles en posició de Tales són semblants, també ho seran qualsevol dos triangles que es puguin col·locar en posició de Tales.

I uns comentaris i/o reflexions sobre figures i triangles semblants:

☞ Malgrat que la definició de figures semblants diu que han de tenir tots els costats proporcionals i tots els angles respectivament iguals, de vegades, en figures molt senzilles o amb certes propietats, no cal comprovar-ho tot.

☞ En algun casos cal comprovar ben poc (Són els casos ja comentats de tots els triangles equilàters, que són semblants, o els quadrats, o els cercles...).

☞ Ja varem dir que no tots els rombes són semblants. Però, com que cada rombe té els quatre costats iguals, és segur que dos rombes sempre tindran costats proporcionals! Llavors, per a què siguin semblants n'hi ha prou amb que tinguin angles iguals; i, ben mirat, amb només un angle igual els altres tres ja han de coincidir (Exemple: Amb un angle de 50º cada rombe, els altres seran iguals perquè seran de 130º, 50º i 130º)... Fes un dibuix, si no ho veus.

☞ Hem vist (exemple de les pantalles) que no tots els rectangles són semblants, malgrat tenir angles respectivament iguals (tots de 90º). Però, per a què siguin semblants, ni ha prou amb que tinguin bases i altures proporcionals.

☞ Pel que fa als triangles, tampoc és necessita comprovar la igualtat de tots els angles ni la proporcionalitat de tots els costats.

Per exemple, si dos triangles tenen dos angles iguals, també tindran igual el tercer (per allò de que "sumen 180º"). I, en ser tots tres angles iguals, és segur que, movent-los, es poden col·locar en posició de Tales i són semblants.

En general, per a què dos triangles siguin semblants, n'hi ha prou amb que satisfacin una d'aquestes condicions (**Criteris de semblança de triangles**):

1. Tenir dos angles iguals (**1r criteri**)
2. Tenir els tres costats proporcionals (**2n criteri**)
3. Tenir dos costats proporcionals i igual l'angle que abracen (**3r criteri**)

5. I... QUÈ TENIM MÉS?

T'aconsello una passejada on pots visitar el lloc

http://www.edu365.com/eso/muds/matematiques/index.htm#

i mirar-te l'activitat *Què diu el Teorema de Tales?* (Encara que ja ho sàpigues).

Dins d'aquesta pàgina, concretament a la llista de les MUD (Mini unitats didàctiques) pots trobar també *El món de les ampliacions i les reduccions,* amb tot un seguit d'activitats d'aprenentatge força interessants (però, tant de bo també et sobrin!).

Per tot el que acabo de dir, aquestes pàgines són "de visita opcional". Crec que ja en tens prou amb el que s'ha explicat aquí i espero que l'hagis entès tot.

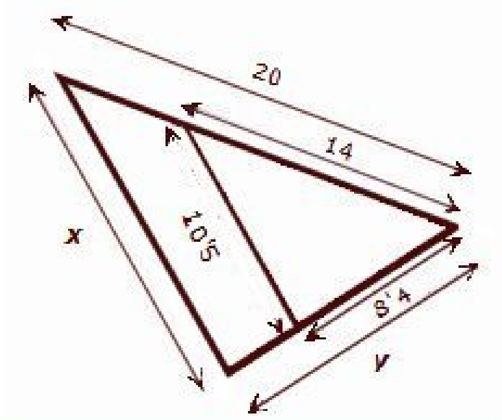
Això sí: Cara a practicar el fer exercicis, ja no et recomano, sinó que et demano de fer una volteta per les activitats Geoclic a la mateixa pàgina esmentada a dalt.

Ja saps: Cliques al requadre anomenat JClic (part superior dreta), a Geoclic en la finestra que sortirà i... aquesta vegada enfronta el paquet d'activitats nº 23. Ves fent-les, pots passar-les apresa si les veus fàcils (et saltes alguna, si de cas). L'ultima, que vol ser una demostració del Teorema de Tales, oblida-la.

I, ara, uns quants exercicis resolts sobre triangles en posició de Tales:

Exemple 8 (Problema quasi resolt)

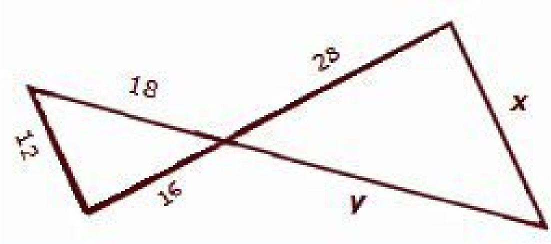
Troba raonadament els valors de x i y sabent que els triangles de la figura es troben en posició de Tales.



Per la proporcionalitat dels costats sabem que $\frac{14}{20}=\frac{10'5}{x}=\frac{8'4}{y}$ $\left(\frac{costats\ petit}{costats\ gran}\right)$, i d'aquí surt fàcilment $x = 15$, $y = 12$ (Comprova els càlculs).

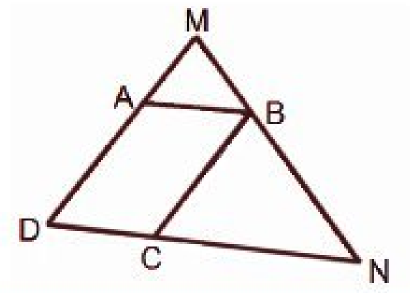
Exemple 9 (Problema quasi resolt)

Troba raonadament x i y sabent que els triangles de la figura estan en posició de Tales "invertida" i indica quina és la raó de semblança del triangle gran al triangle petit.



Per la proporcionalitat dels costats i parant especial atenció a quins costats es corresponen exactament en un triangle i l'altre, tenim que 28, x, y són proporcionals (per aquest ordre) a 16, 12, 18, és a dir, tenim que $\frac{28}{16}=\frac{x}{12}=\frac{y}{18}=1'75$.

D'aquesta proporcionalitat surt $x = 21$, $y = 31'5$ i la raó de semblança del triangle gran al triangle petit és 1'75 (Comprova els càlculs).



Exemple 10 (Problema resolt)

Sabent que ABCD és un paral·lelogram, troba raonadament les longituds dels seus costats, amb aquestes dades:

MA = 11 , MB = 15

BN = 33 , CN = 30

Com que ABCD és un paral·lelogram, AB és paral·lel a DN i BC a MD. Al dibuix has de veure *dues* parelles de triangles *en posició de Tales*: MAB i MDN, NBC i NMD.

Segons el *Teorema de Tales*, MAB i MDN són semblants (també ho són NBC i NMD) Per tant, els seus costats són proporcionals i es compleix el següent:

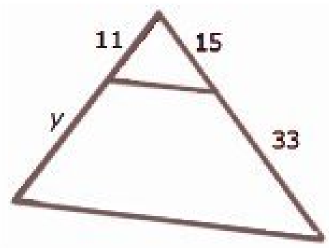
$$\frac{MA}{MD}=\frac{AB}{DN}=\frac{MB}{MN} \qquad \text{i} \qquad \frac{NC}{ND}=\frac{CB}{DM}=\frac{NB}{NM}$$

Hem de calcular AB ó DC (tant li fa, perquè són iguals) i BC ó AD. Per facilitar el plantejament, escriu AB = DC = x i BC = AD = y, i expressa en funció de x i de y tot el que apareix en les proporcions anteriors.

Amb les equacions que surten de la primera proporció pots resoldre el problema:

$$\frac{11}{11+y}=\frac{x}{x+30}=\frac{15}{48} \Rightarrow \begin{cases} 11\cdot 48 = 15\cdot(11+y) \Rightarrow 528 = 165+15y \Rightarrow y = 363/15 = 24'2 \\ 15\cdot(x+30) = 48\cdot x \Rightarrow 15x+450 = 48x \Rightarrow x = 450/33 \cong 13'6 \end{cases}$$

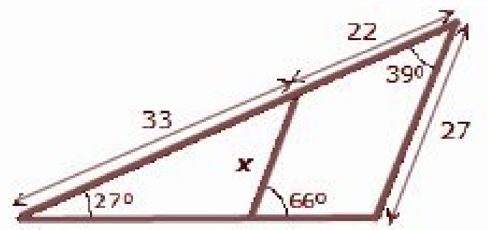
Nota: El plantejament l'hauràs trobat relativament fàcil (Sí?). La resolució per equacions no és difícil, però surten equacions més senzilles amb altre plantejament.



Exactament: Torna a mirar la figura, oblidat del segment BC i pensa en el Teorema de Tales, en lloc de pensar en "triangles en posició de Tales".

Fas $\frac{11}{y}=\frac{15}{33}$ i de seguida surt 363 = 15·y , y = 24'2

I també pots trobar x de forma més senzilla (endevina com)... Sempre hi ha una altra forma de fer les coses!



Exemple 11 (Problema "mig" resolt)

Raona que els dos triangles que apareixen a la primera de les dues figures inferiors són triangles en posició de Tales i troba raonadament x.

No s'hi val dir: Són triangles en posició de Tales perquè "ja es veu" que els costats marcats amb x i 27 són paral·lels... Això de que "són paral·lels" s'haurà de raonar!

I és senzill, ja que, amb les dades de l'angle de 27º i el de 66º es dedueix fàcilment (pensa com) que els angles del triangle petit (interior) són de 27º, ?? i 39º.

Ara sí: Com que aquest últim angle és igual que el que formen en el triangle gran els costats de 55 i de 27, podem dir que els costats x i 27 són paral·lels i que els triangles estan en posició de Tales.

Busca la proporció que et permet calcular x i comprova que surt x = 16'2.

Institut Obert de Catalunya
Departament de Matemàtiques - Àmbit Científic

Aquest document ha estat elaborat pel professor:

Joaquín Villanova Ballabriga