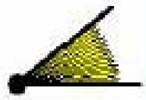
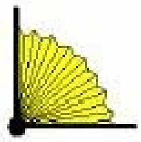
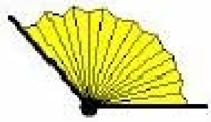
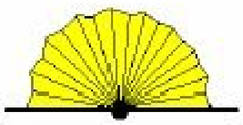
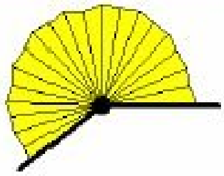
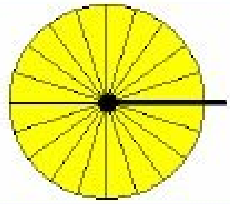
1. ANGLES: CONCEPTE, TIPUS I UNITATS DE MESURA

Idea intuïtiva d'angle, tipus d'angles: Un ventall xinès obrint-se proporciona una idea intuïtiva del que és un angle, així com dels diferents tipus d'angles existents.

Tot i que després el recordarem, imagino que coneixes el sistema de mesura d'angles (en graus, minuts i segons), així que aprofito per indicar quin valor té o entre quins valors es troba la mesura, ***x***, de l'angle o tipus d'angle, en cada cas:

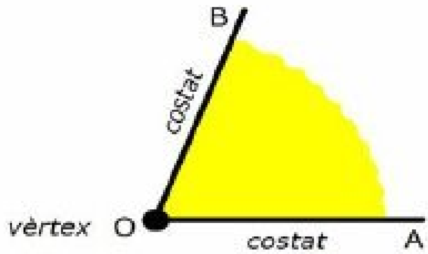
Angles (menors que un angle pla)			
			
Angle nul (o *angle zero*) $x = 0^\circ$	**Angle agut** (menor que un recte) $x < 90^\circ$	**Angle recte** (costats perpendiculars) $x = 90^\circ$	**Angle obtús** (major que un recte i menor que un angle pla) $90^\circ < x < 180^\circ$

Altres		
		
Angle pla (costats alineats, en prolongació) $x = 180^\circ$	**Angle còncau** (major que un angle pla) $x > 180^\circ$	**Angle complet** $x = 360^\circ$

Concepte matemàtic d'angle

Un angle és la porció d'un pla delimitada per dues semirectes OA *i* OB, *amb origen comú,* O.

Les semirectes OA *i* OB *s'anomenen costats de l'angle, el punt O s'anomena vèrtex de l'angle.*



Mesura d'angles

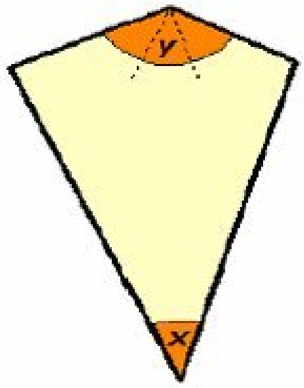
L'aparell més comunament utilitzat per mesurar angles és el transportador o semicercle graduat. Segur que el coneixes i l'has fet servir en alguna ocasió: És com un angle pla i està dividit en 180º (graus "sexagesimals").

Transportador

El grau és la unitat de mesura d'angles, però per mesurar angles amb més precisió s'utilitzen unitats menors que el grau i necessiten aparells més sofisticats. Aquestes subunitats són el minut i el segon:

Un minut és la seixantena part d'un grau: $1' = 1^\circ/60$ o bé $1^\circ = 60'$
Un segon és la seixantena part d'un minut: $1'' = 1'/60$ o bé $1' = 60''$

Observació 1: *Sobre el veritable significat dels angles.*



Quan veiem un angle dins d'una figura i volem fer-nos una idea de la seva grandària, no hem de mirar tant els seus costats (les longituds dels quals venen determinats per la grandària de la figura) sinó l'obertura de l'angle, que és el que realment ens diu si és més gran o més petit.

Per exemple, a la figura de la dreta els costats de l'angle ***x*** són molt més grans que els costats de l'angle ***y***, però l'angle ***y*** és major que ***x*** perquè la seva obertura, que és el que realment importa, és el triple de l'obertura de ***x***.

Observació 2: *És un grau quelcom insignificant?*

Un grau, vist sobre un transportador senzill, sembla molt petit o "molt tancat"... Quin sentit té, doncs, usar unitats molt més petites, com el minut i el segon?

El cert és que, malgrat veure'l "tan prim", el grau continua obrint-se i obrint-se a mida que perllonguem els costats i, mentre que en una curta distància no cap ni una llentia entre els seus costats, en distàncies realment grans (com ara les de la Terra), pot arribar a cabre una illa sencera: Tenerife, per exemple (Veure la figura).

I un cotxe que circuli per l'illa no ocupa ni la sisena part de l'amplada d'un angle d'un segon (la seixantena part de la seixantena part d'un grau), i prou que el localitza un GPS! O no? No estem parlant, doncs, de cap cosa de l'altre món.

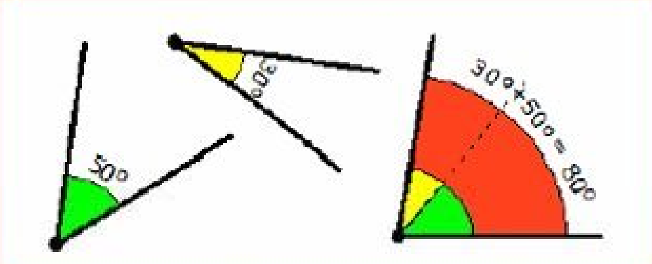
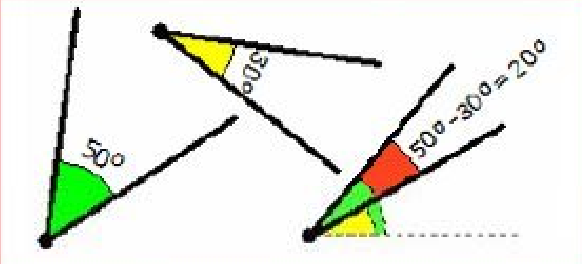
Per això són necessaris els graus i minuts, ni que semblin molt petits (i ja no parlo de la seva necessitat en mesures astronòmiques: Posició d'astres, etcètera).

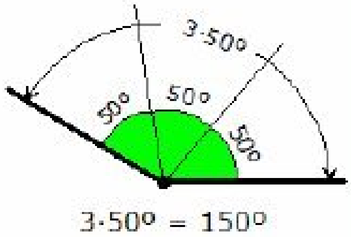
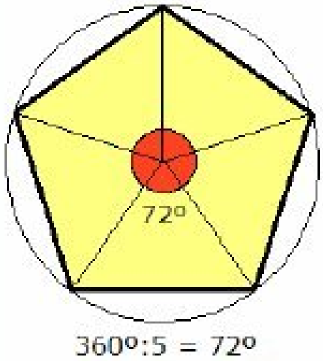
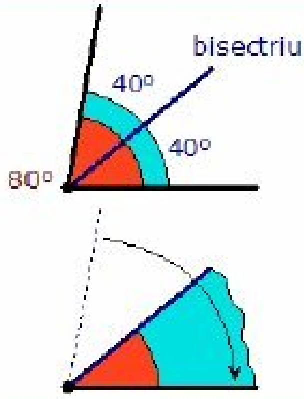
2. OPERACIONS I CÀLCULS AMB ANGLES

Operacions amb angles: Concepte

Els angles es poden **sumar** i **restar**. També es poden **multiplicar** o **dividir per un nombre enter** i, combinant aquestes operacions, fer **parts fraccionàries** d'angles.

Alguna idea tindràs sobre com es fan aquestes operacions, ja sigui "manualment" o "dibuixant", i també sobre com fer-les aritmèticament, amb les mesures dels angles. Per això només faré un resum "visual" del seu significat, amb algunes observacions sobre nomenclatura i sobre la forma de calcular amb graus, minuts i segons.

Suma d'angles	Diferència d'angles
	
Per sumar angles es col·loquen consecutius (fent coincidir el segon costat de l'un amb el primer de l'altre) i "s'uneixen".	Per restar angles es superposen fent coincidir el primer costat de tots dos, i "retallem del primer la part del segon"

Producte d'un angle per un nombre	Divisió d'un angle per un nombre	Bipartició d'un angle: La bisectriu
		
Multiplicar un angle per 3 és sumar-lo tres vegades amb sí mateix	La divisió de l'angle complet en parts iguals serveix per construir polígons regulars (Cinc parts: Un pentàgon)	La bisectriu és la recta que divideix l'angle en dos angles iguals. Apareix doblegant-lo de forma que es superposin els seus dos costats.

Càlcul i mesura d'angles quan surten decimals

En fer mesures o càlculs amb angles, pots obtenir resultats com aquest (comprova!): L'angle que surt en dividir un angle de 87º en quatre parts iguals té 87:4 = 21'75º.

Saps (o has de saber) que 21,75º no són 21º i 75' (minuts): Són 21º i "setanta-cinc centèsimes de grau". Setanta-cinc centèsimes també són ¾. Així que aquest 0,75º representa 3/4 de grau = 3/4 de 60' = 45' (També pots fer: 0,75 · 60' = 45').

Així és com es converteixen a graus, minuts i segons els resultats decimals (inevitables quan s'utilitza una calculadora perquè ella, "en no saber com vols els resultats", te'ls dóna sempre en decimals, com si fossin euros i cèntims d'euro, no te'ls escriu en graus, minuts i segons, ni en hores, minuts i segons). Concretament:

> Per convertir en graus, minuts i segons un decimal *N'abc...*º es separa la part decimal, *abc...*, i es converteix en minuts multiplicant-la per 60. I si queda una part decimal dels minuts, es converteix en segons de la mateixa forma.
>
> Si la calculadora té la tecla **º ' ''** serveix per convertir graus, minuts i segons en decimals o viceversa, tal com s'explica tot seguit.

EXEMPLE 1 (Exercici resolt): Converteix 32,41º a graus, minuts i segons.

Són 32º + 0,41 · 60' = 32º + 24,6' = 32º + 24' + 0,6 · 60'' = 32º 24' 36''.

Si la calculadora té la tecla **º ' ''** has de saber que serveix per convertir graus, minuts i segons en "graus amb decimals" (Ho veuràs més clar al següent exercici).

També serveix per convertir decimals a graus minuts i segons, però "utilitzant-la a la inversa"... És per això que has de procedir així:

Assegura't primer que la calculadora està en el mode DEG, que garanteix que farà els càlculs en graus (consulta instruccions, si s'escau).

Tecleja 32.41, les tecles **INV** (o equivalent) i **º ' ''** (per aquest ordre) i mira si apareix en pantalla 32º 24º36º, que significa 32º24' 36'' (L'escriu així!).

Si uses la calculadora del Windows, mira que estigui en la forma "sexagesimal", tecleja 32.41 i la tecla **gms** (graus, minuts i segons) que funciona directament, no "a la inversa". Apareix 32.2436, que significa 32º 24′ 36″ (És com l'escriu!).

EXEMPLE 2 (Exercici resolt): Converteix 32º 24′ 36″ a decimal.

Procediment segur, amb qualsevol calculadora: Dividint els segons per 3600 i els minuts per 60, es converteixen en decimals de graus. Ho sumes tot i has acabat:

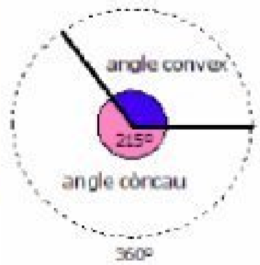
$$32^\circ 24' 36'' = 32^\circ + 24/60^\circ + 36/3600^\circ = 32^\circ + 0{,}4^\circ + 0{,}01^\circ$$

Amb la calculadora de la tecla **º ′ ″** : Entres 32, prems la tecla, entres 24, prems la teda, entres 36 i prems la tecla. Si en tens una, comprova que s'obté 32,41.

Amb la calculadora de Windows: Escrius 32.2436, prems **Inv** i després la tecla **gms**.

EXEMPLE 3 (Exercici resolt)

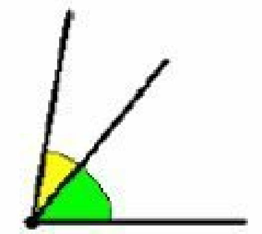
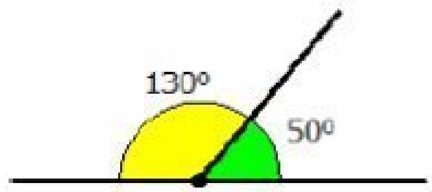
Un dels angles que formen dues semirectes amb origen comú és 215º, què val l'altre? De quin tipus és cada angle?



Els dos angles, junts, han de formar l'angle complet, de 360º.

215º és un angle còncau, perquè és major que 180º. Per tant, l'angle convex és de 360º - 215º = 145º (Que també és obtús).

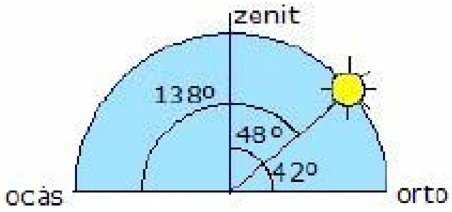
3. ALGUNES RELACIONS ENTRE PARELLES D'ANGLES

Angles consecutius o contigus	Angles adjacents
	
Dos angles són **consecutius** o **contigus** si estan col·locats de forma que tenen un costat comú i no es superposen (tal com els col·loquem per sumar-los).	Dos angles són **adjacents** si, a més de ser contigus, tenen els altres dos costats alineats (*adjacere = "dormir" junts*). Dos angles adjacents sumen 180º.

- Diem que dos angles són **complementaris** si sumen 90º.
- Diem que dos angles són **suplementaris** si sumen 180º.

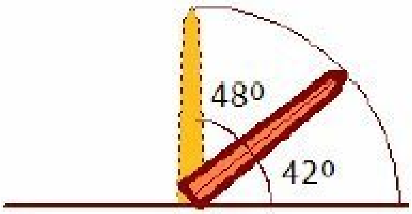
Observacions:

Els termes complementari i suplementari tenen el seu origen, presumiblement, en l'observació del moviment aparent del sol al cel (aparent perquè el gir que fa el Sol és degut, realment, al moviment de rotació de la Terra).

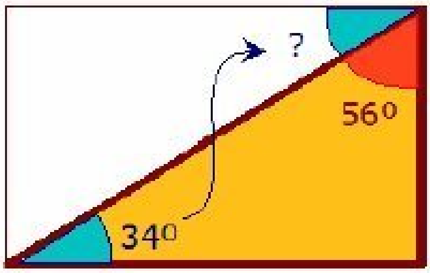


Posem que des que surt (orto) fins que s'amaga (ocàs) recorre 180º. El zenit (punt més alt del recorregut) té lloc quan ha recorregut 90º (Això depèn del lloc i el dia, però ho donarem per bo).

I, quan ha recorregut un angle de 42º, el seu complement són els 90º - 42º = 48º que falten per arribar al zenit, i, el suplement, són els 180º - 42º = 138º que li falten per a l'ocàs.



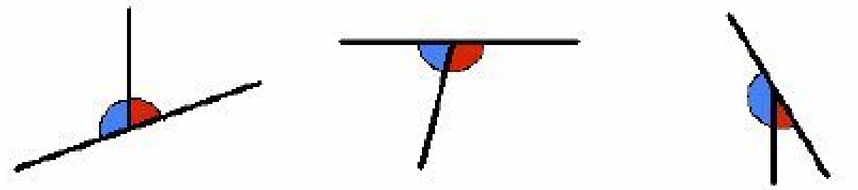
Si pensem en l'aixecament d'un obelisc, també podem dir que el complement d'un angle és el que falta per "col·locar-lo dret".



Dos angles poden ser complementaris o suplementaris encara que no siguin consecutius ni adjacents: N'hi ha prou amb que sumin el que cal. Per exemple, és fàcil observar que els dos angles aguts d'un triangle rectangle són complementaris (sumen 90º) i no són contigus.

Observa, finalment, que dos angles *adjacents* junts formen un angle pla. I acostuma't a veure'ls en diferents posicions: Et recordaran una T majúscula (ni que sigui inclinada). Memoritza aquesta "recepta" (**Regla de la T**):

Els angles d'una T (adjacents) sumen 180º



4. NECESSITES REPASSAR...?

Imagino que recordes com se sumen o resten angles quan la seva expressió conté graus, minuts i segons. Vull dir: Imagino que saps

per què l'angle suma de 22º 36' 42" i 31º 41' 30'' és 54º 18' 12"

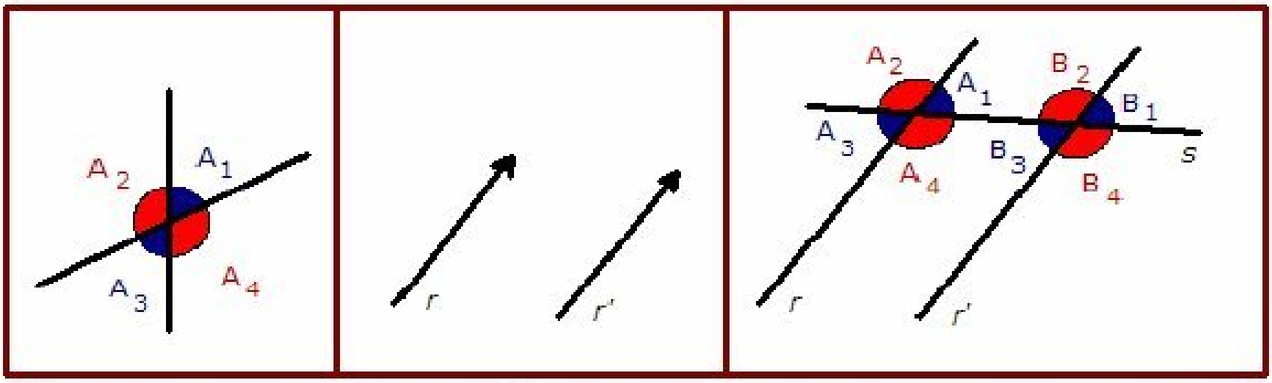
o perquè el complementari de 34º 37' és 90º - 34º 37' = 55º 23'

Aquí tens la solució a les operacions abans esmentades:

$$\begin{array}{r} 22^\circ\ 36'\ 42'' \\ +\ 31^\circ\ 41'\ 30'' \\ \hline 53^\circ\ 77'\ 72'' \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 90^\circ \\ -\ 34^\circ\ 37' \\ \hline \end{array} \ \rightarrow\ \begin{array}{r} 89^\circ\ 60' \\ -\ 34^\circ\ 37' \\ \hline 55^\circ\ 23' \end{array}$$

$$53^\circ\ 77'\ 72'' \ = \ 53^\circ + 1^\circ + 17' + 1' + 12'' \ = \ 54^\circ\ 18'\ 12''$$

5. ANGLES FORMATS PER RECTES QUE ES TALLEN



Dues rectes que es tallen formen quatre angles, dos a dos iguals o suplementaris, segons que estiguin en oposició o siguin consecutius:

$A_1 = A_3$ $\quad A_2 = A_4$ …

$A_1 + A_2 = 180º$ $\quad A_2 + A_3 = 180º$ …

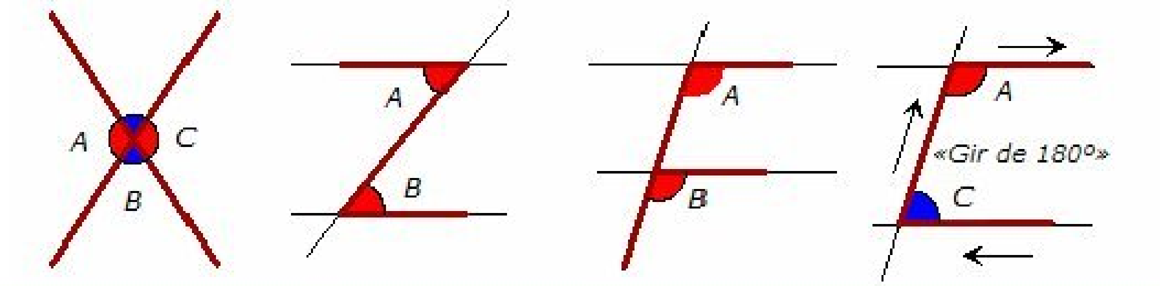
Imagina que tens dues rectes paral·leles (van en la mateixa direcció) i tallen una altra. És lògic que formin uns mateixos angles amb aquesta tercera recta. Concretament:

$A_1 = B_1$ $\quad A_2 = B_2$ $\quad A_3 = B_3$ $\quad A_4 = B_4$ …

$A_1 = B_3$ $\quad A_2 = B_4$ $\quad A_3 = B_1$ $\quad A_4 = B_2$ …

$A_1 + B_2 = 180º$ $\quad A_4 + B_3 = 180º$ …

Una forma fàcil de recordar tot això ens la proporciona l'ús de les lletres X, Z, F i C:



Regla de la X	**Regla de la Z**	**Regla de la F**	**Regla de la C**
Els angles de la X són iguals o suplementaris	*Els angles de la Z són iguals*	*Els angles de la F són iguals*	*Els angles de la C són suplementaris*
A = C A + B = 180º	A = B	A = B	A + C = 180º

6. TRIANGLES: CONCEPTE I PROPIETATS

Què és un triangle

Prou saps que *un triangle és un polígon de tres costats* i que té, també tres angles (És el tipus de polígon més senzill que existeix).

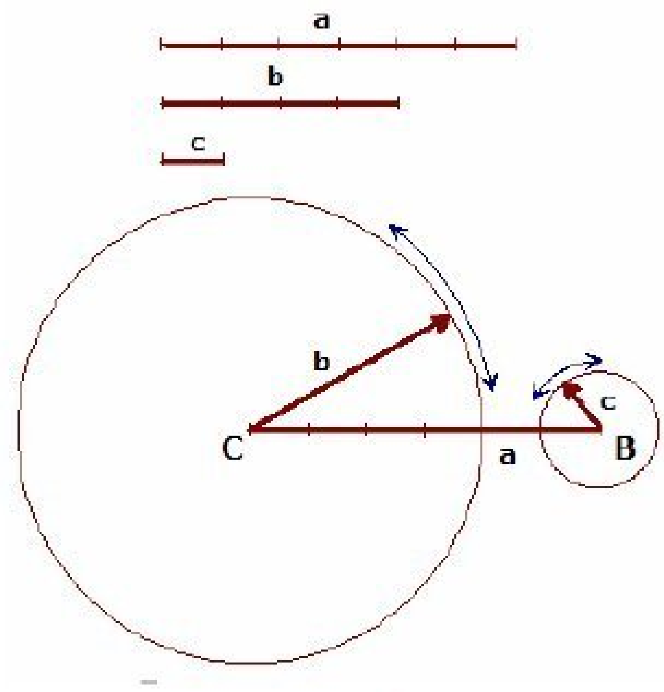
Propietats dels triangles

Dels costats: Mai cap costat d'un triangle pot ser major que la suma dels altres dos.

Dels angles: Els tres angles de qualsevol triangle sumen 180º.

I una altra: Tant més gran és un angle d'un triangle, tant més gran és el costat oposat, i recíprocament.

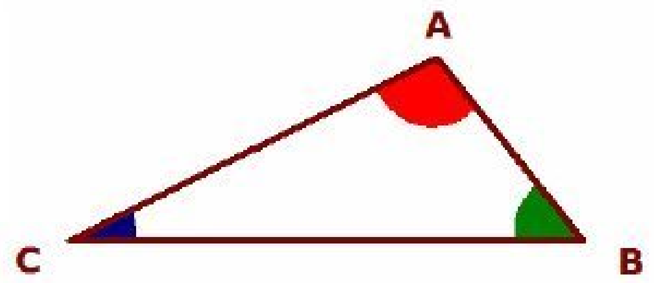
Observacions, comentaris i/o demostracions



Hi ha triangles de diferents mides, tant pel que fa als costats com pel que fa als angles, però això no significa que pugui existir qualsevol triangle,amb tres mides inventades a l'atzar.

Per exemple, un triangle de costats 1, 4 i 6... no existeix!: "Són massa curts i el triangle no es tanca"... I això passa per ser $6 > 1 + 4$.

Aquesta propietat també s'expressa dient que *dos costats d'un triangle sempre sumen més que l'altre.*

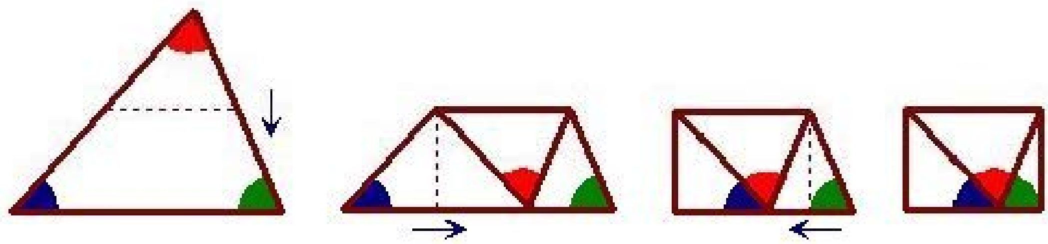


Mira-ho així, en la segona figura: CA + AB representa sempre un camí necessàriament més llarg que CB, ja que CB és el camí recte de C a B i, per tant, ha de ser més curt).

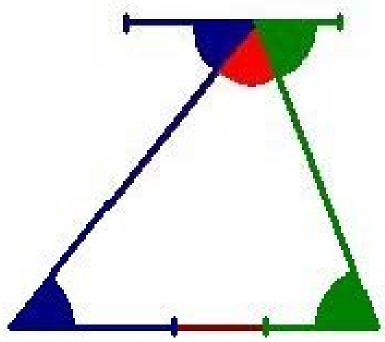
Aquest segon dibuix també permet comentar la 3a propietat, perquè ja es veu clarament que:

> El costat major és CB, oposat a l'angle major o "més obert", A.
>
> El costat mitjà és AC, oposat a l'angle mitjà, B.
>
> El costat més petit és AB, oposat a l'angle menor, C.

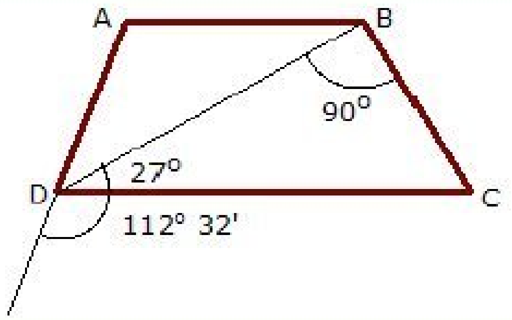
Pel que respecta al que sumen els tres angles d'un triangle, aquí tens una activitat "manual" que permet constatar clarament per què sumen 180º: Doblega un triangle de paper tal com indiquen les figures (A que s'assembla al plegat de sobres?)



També podríem demostrar-lo elegantment amb un parell de zetes ben dibuixades Imagina l'Antonio Banderas en el seu paper de "El Zorro", fent-ho amb dues ziga-zagues de l'espasa):

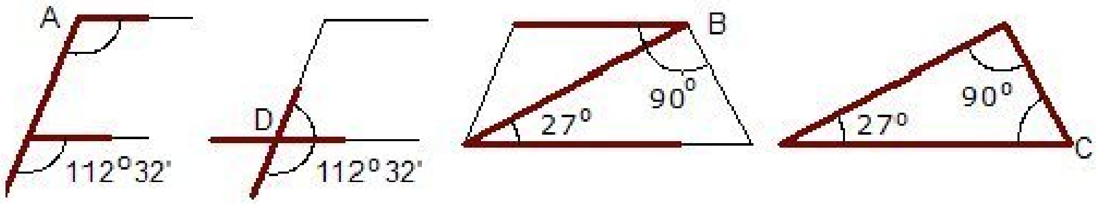


7. EXERCICIS I PROBLEMES RESOLTS



Exemple 4 (problema resolt)

La figura adjunta és un trapezi (Ja saps: Un quadrilàter que només té dos costats paral·lels: AB i DC). Amb les dades que es donen, troba raonadament les mides dels seus quatre angles. quin és el convex?



A = 112º 32', per la *regla de la F* (primera figura).

L'angle del trapezi en D (naturalment, l'interior) té una amplitud 180º - 112º 32' = = 67º 28' segons la *regla de la X* (segona figura).

L'angle que forma la diagonal BD amb el costat AB té 27º, segons la *regla de la Z* (figura 3). Per tant, l'angle B del trapezi és B = 27º + 90º = 117º.

Com que els tres angles d'un triangle sumen 180º (quarta figura), d'aplicar això al triangle BCD (quarta figura) surt que C = 180º - (27º+90º) = 63º. Observa que també es pot arribar a aquest resultat aplicat a l'angle B = 117º la *regla de la C*).

Exemple 5 (Qüestió resolta)

Què opines d'aquests anunci?: *GRAN OCASIÓ! Venc terreny triangular de costats 240, 125 i 115 metres per 25.000 €, en primera línia de platja!*

És una estafa. Com que els costats de 125 i 115 sumen 125 + 115 = 240 m, el mateix que el gran, aquest terreny no arriba a ser un triangle: Només és una línia i no té superfície. (I encara que els costats fossin, 127, 118 i 240, on la suma 127 + 118 supera lleugerament 240, el terreny només seria un "inútil" triangle llarg i prim).

Exemple 6 (Qüestió resolta)

Pot tenir un triangle un angle recte i un altre obtús?

No, perquè l'angle recte té 90º i un angle obtús fa més de 90º. Llavors, aquests dos angles sumarien més de 180º i els angles d'un triangle han de sumar 180º.

A sobre, un intent de fer o dibuixar un tal triangle mostra de seguida que els seus costats "mai no s'ajuntarien".

(Però aquesta argumentació és menys "sòlida" que l'altra; així, doncs, aprèn l'altra).

Exemple 7 (Problema resolt)

Dels tres angles d'un triangle sabem que el mitjà té 12º més que el menor, i el major té 24º més que el mitjà. Què valen els seus angles?

No cal fer dibuixos. Només cal anomenar correctament els angles d'acord amb el que ens diuen, la qual cosa ens permet representar-los així

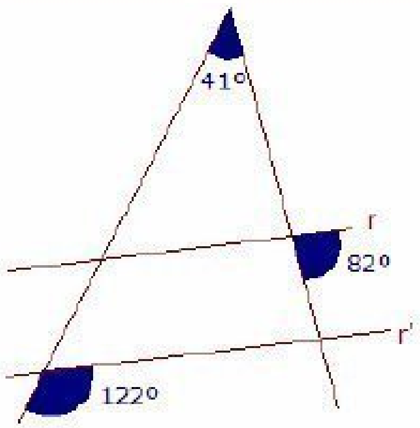
$\boldsymbol{x}$ el petit $\quad \boldsymbol{x}+12$ el mitjà $\quad$ i $\quad \boldsymbol{x}+12+24 = \boldsymbol{x}+36$ el gran

Com que han de sumar 180º, d'aquí resulta l'equació $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}+12+\boldsymbol{x}+36 = 180$, que es redueix a $3\boldsymbol{x}+48 = 180$ i es resol fàcilment:

$$3\boldsymbol{x}+48 = 180 \quad \rightarrow \quad 3\boldsymbol{x} = 180-48 = 132 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x} = 132/3 = 44$$

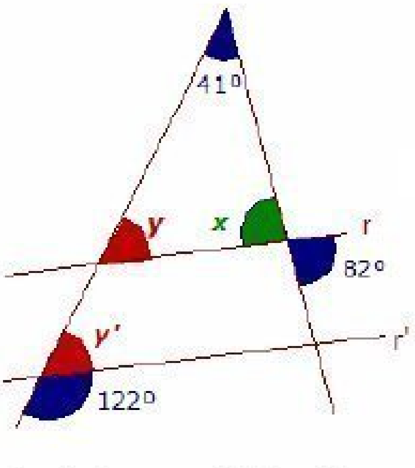
Així que els angles valen

$\boldsymbol{x} = 44^{\circ}$ el petit $\quad 44+12 = 56^{\circ}$ el mitjà $\quad$ i $\quad 44+36 = 80^{\circ}$



Exemple 8 (Qüestió resolta)

Són paral·leles les rectes *r* i *r'* del dibuix?



Prou que semblen paral·leles al dibuix, però, amb les dades que tenim sobre els valors dels angles, no ens hem de refiar de "la vista" i hem de mirar si aquestes dades quadren amb el que caldria esperar si *r* i *r'* fossin paral·leles.

I, ja d'entrada, per la *regla de la X* (altrament dit, per ser $\boldsymbol{x}$ i 82º oposats pel vèrtex) $\boldsymbol{x} = 82^{\circ}$.

Per la *regla de la T* (altrament dit, per ser $\boldsymbol{y'}$ i 122º adjacents), $\boldsymbol{y} = 180^{\circ} - 122^{\circ} = 58^{\circ}$.

Aleshores, si *r* i *r'* fossin paral·leles, els angles $\boldsymbol{y'}$ i $\boldsymbol{y}$ haurien de ser iguals. Per tant, seria $\boldsymbol{y} = 58^{\circ}$.

Però, llavors, al triangle superior els angles sumarien $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+41^{\circ} = 82^{\circ}+58^{\circ}+41^{\circ} = 181^{\circ}$ i excedeix en un grau a 180º, que és el que ha de valer la suma.

Per tant, *r* i *r'* no poden ser paral·leles (Si ho penses una mica, descobriràs que o bé l'angle de 122º hauria de ser de 123º, o bé l'angle de 82º hauria de ser de 81º).

8 CLASSIFICACIÓ DELS TRIANGLES: TIPUS

Tipus de triangles atenent a les relacions existents entre els seus costats

Un triangle pot tenir dos, tres costats iguals, o cap. Diem que

és *isòsceles* si té dos costats iguals.

és *equilàter* si té els tres costats iguals.

es escalè si té tots els costats diferents.

Tipus de triangles atenent als valors del seus angles

Un triangle no pot tenir més de dos angles rectangles o obtusangles, perquè la suma d'aquests dos angles superaria els 180º, que és el que han de sumar tots els angles del triangle. Tenint present això, diem que

és *acutangle* si tots els seus angles són aguts.

és *rectangle* si té un angle recte.

és *obtusangle* si té un angle obtús.

Cal observar que el triangle isòsceles, que té dos costats iguals, també té dos angles iguals.

Altres activitats d'estudi i/o aprenentatge

Si encara no tens el programa Geoclic, te'l pots baixar seguint les instruccions que trobaràs a

http://clic.xtec.net/db/act_es.jsp?id=1308

També pots utilitzar-lo sense necessitat de descarregar-te'l anant a la pàgina

http://www.edu365.com/eso/muds/matematiques/index.htm#

Clicant a les **activitats JClic** (angle superior dret) i després a **Geoclic** (a la finestra que surt), obriràs el programa. En aquesta ocasió es tracta de fer els següents blocs d'activitats:

Bloc d'activitats 2: Triangles. Intenta fer-les totes, excepte les dues últimes.

Bloc d'activitats 6: Angles 1. Fes només les sis primeres.

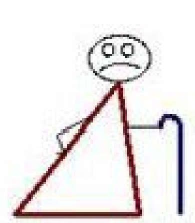
Hauries de repetir cada activitat mentre no siguis capaç de fer-la sense pràcticament cap error, sempre mirant de pensar en què t'equivoques i per què.

Observació 1: *PARAULOTES GREGUES I LLATINES (Curiositats)*

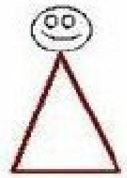
Fa més de 25 segles els grecs van inventar moltes de les paraules que avui en dia apliquem a les figures. I no es complicaven la vida a l'hora d'inventar-les: Feien servir paraules que els suggerien quelcom de conegut que els recordés la figura.

El problema és que s'han mantingut els noms tal com sonen en la seva llengua i, mentre que per a qualsevol grec escoltar la paraula i associar-la amb la figura és molt fàcil, a nosaltres, naturalment, ens sonen... a grec!

Així, per exemple, *escalè* vol dir *coix*, nom que van fer servir per referir-se als triangles que, per tenir els costats desiguals, "posats en peu semblaven coixos".



TRIANGLE ESCALÈ
(coix)



TRIANGLE ISÒSCELES
(Té les cames iguals)

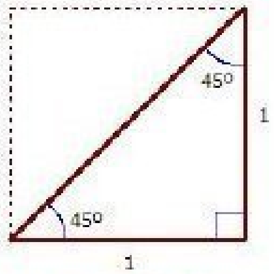
Per contra, els triangles que tenien dos costats iguals semblaven "tenir les cames iguals". Per això els van anomenar *isòsceles*, paraula que significa *cames iguals*.

Al triangle que té els tres angles iguals li deien isògon (que significa *angles iguals*), però els romans van traduir el nom fixant-se en els costats *(làters)*, també iguals, i l'anomenaren equilàter: *costats iguals.*

TRIANGLE RECTANGLE

Als costats del triangle rectangle els va posar nom Pitàgores (matemàtic grec que va fer un notable descobriment sobre els tals triangles), dient-los *catets* i *hipotenusa.* Malgrat que els noms sonin estranys, només et cal saber que *catets* significa *els que van rectes* (és a dir, *"els que formen l'angle recte"*), i *hipotenusa* significa *la que va (o "cavalca") en diagonal...*

Per acabar: Si mai et diuen que ets un *poliedre*, potser t'estan dient que tens molta cara... Tu mateix/a!

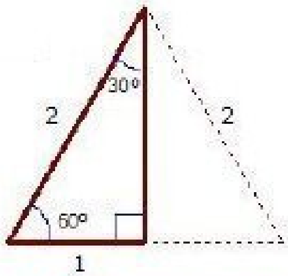


CARTABÓ: Triangle rectangle isòsceles

Observació 2: *Dos triangles rectangles importants (el cartabó i l'escaire)*

T'has fixat que un cartabó és simplement *mig quadrat* (dividit per la diagonal)? Amb això és clar que és un *triangle rectangle* amb els dos catets iguals i, per tant, *isòsceles*. El seus angles aguts són tots dos de 45º.

En ser iguals els catets del cartabó, s'acostuma a dir que estan en la raó 1:1 (aprèn això, de memòria, però relaciona-ho amb la mesura dels catets).



ESCAIRE: Rectangle escalè
Mig triangle equilàter

I un escaire és exactament *mig triangle equilàter*, (dividit per l'altura). Considerant el fet evident que tots els angles d'un triangle equilàter fan 60º, és clar que els de l'escaire fan 30º, 60º i 90º. És, doncs, un triangle rectangle escalè.

El costat gran de l'escaire (la hipotenusa) és el del triangle equilàter del qual surt. El catet petit és la meitat del costat del triangle equilàter. Podem dir, doncs, que *la raó del catet petit a la hipotenusa de l'escaire és 1:2* (memoritza també això).

Mostrem aquests dos triangles tal com s'hi treballa amb ells en la pràctica, a disseny i arquitectura.

9. PROBLEMES i QÜESTIONS RESOLTES

Exemple 9 (Qüestió resolta)

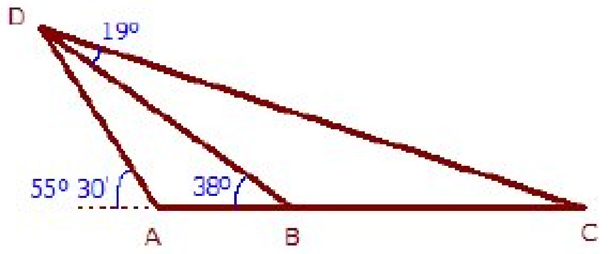
Si un dels angles d'un triangle isòsceles val 115º, quins valors tenen els altres dos angles?

No diuen si l'angle de 115º és un dels dos angles iguals o és l'angle "diferent", però ha de ser aquest últim perquè, si el triangle tingués dos angles de 115º la suma d'aquests dos seria 230º i depassaria de llarg el que han de sumar tots (180º).

Llavors, si anomenem $\boldsymbol{x}$ cadascun dels dos angles que ens falten, s'ha de complir l'equació $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} + 115º = 180º$, d'on surt fàcilment que $\boldsymbol{x} = (180º - 115º)/2 = 65º/2 = 32{,}5º$ i això significa que cadascun dels dos angles que falten té 32º 30'.

Exemple 10 (Problema resolt)

Quants triangles veus a la figura i què valen el seus angles? Algun d'aquests triangles és d'algun tipus especial?



Si només veus dos, torna a mirar-la perquè has d'observar que hi ha <u>tres</u> triangles:

ABD a l'esquerra, *obtusangle*. Tens l'angle en B, és 38º. És clar que l'angle en A és 180º - 55º 30' = 124º 30'. Com que aquest dos sumen 38º + 124º 30' = 162º 30', l'angle d'aquest triangle al vèrtex D és de 180º - 162º 30' = 17º 30' (Pots anar marcant amb llapis els angles que ja tens)

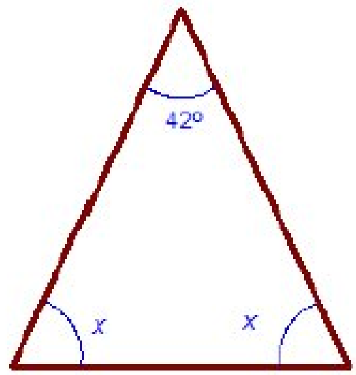
BCD a la dreta, també *obtusangle*. L'angle intern del triangle, en B, és 180º - 38º = = 142º. Com que els dos que tenim sumen 142º + 19º = 161º, el que ens falta (l'angle en C) valdrà 180º - 161º = 19º. Així que els tres angles són 19º, 142º i 19º i en això es veu que té dos angles iguals, per la qual cosa és isòsceles.

Però també has de veure el triangle, ACD, que "engloba aquests dos". Pels càlculs fets saps que els seus angles en A i en C són de 124º 30' i de 19º, respectivament, així que el seu angle en D serà 17º 30' + 19º = 36º 30' (Comprova que sumen 180º)

Exemple 11 (Problema resolt)

L'angle desigual d'un triangle isòsceles és de 42º. Quins angles formen en tallar-se la bisectriu d'aquest angle i la d'un dels altres dos?

Dibuixa (ni que sigui a mà alçada) un croquis del triangle <u>isòsceles</u> i indica les dades que tens i les incògnites que vas descobrint. Segons vas trobant coses, les vas afegint al dibuix i fas un de nou si convé.



Som-hi, doncs!: Com que els tres angles del triangle han de sumar 180º i els dos que falten són iguals, cadascun mesura el que surt de dividir 180º - 42º = = 138º per 2. Cadascun té, doncs, 138º/2 = 69º.

També s'hauria pogut fer plantejant i resolent l'equació

$$2\boldsymbol{x} + 42^\circ = 180^\circ$$

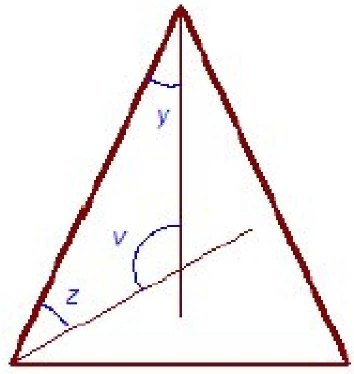
(Pensa per què i fes-lo també així)

Fem una segona figura, on es dibuixen les bisectrius dels angles indicats, Ja saps que la bisectriu d'un angle el divideix en dues parts iguals. Per tant,

$$\boldsymbol{y} = 42^\circ/2 = 21^\circ \quad \text{i} \quad \boldsymbol{z} = 69^\circ/2 = 34^\circ\,30'$$

Llavors,

$$\boldsymbol{v} = 180^\circ - (21^\circ + 34^\circ\,30') = 180^\circ - 55^\circ\,30' = 124^\circ\,30'$$



Aquest és <u>un</u> dels dos angles que formen les bisectrius en tallar-se (l'obtús), perquè també formen un altre d'agut:

180º - 124º 30' = 55º 30' (Veus la X...? Regla de la X!)

ANGLES I TRIANGLES

Institut Obert de Catalunya
Departament de Matemàtiques - Àmbit Científic

Aquest document ha estat elaborat pel professor:

Joaquín Villanova Ballabriga