Definició d'equació. Equacions de primer grau amb una incògnita

1. EQUACIONS: DEFINICIONS

Equació: igualtat entre dues expressions algebraiques.

L'expressió de l'esquerra de la igualtat rep el nom de PRIMER MEMBRE de l'equació; la de la dreta, SEGON MEMBRE.

Incògnita: cadascuna de les variables (representades per lletres) que surten en una equació.

Solució: cadascun dels valors de les variables per als quals la igualtat es compleix.

Equació compatible: aquella que té solució. Si admet un nombre finit de solucions diem que és DETERMINADA i si admet infinites solucions, INDETERMINADA.

Equació incompatible: aquella que no admet solució.

Identitat: equació que admet com a solució qualsevol valor de les incògnites.
Equacions equivalents: aquelles que tenen el mateix conjunt de solucions.

2. RESOLUCIÓ D'EQUACIONS

Resoldre una equació és trobar-ne TOTES les solucions. Això es fa transformant-la successivament en equacions equivalents, fins a arribar a les solucions.

Donada una equació, se'n poden trobar d'equivalents:

a) Sumant o restant el mateix nombre als dos membres d'una equació.

b) Multiplicant o dividint els dos membres d'una equació pel mateix nombre diferent de zero(0).
Per *comprovar les solucions trobades* s'han de substituir en l'equació inicial. Perquè siguin correctes s'ha de verificar la igualtat.

3. PROCEDIMENT GENERAL DE RESOLUCIÓ

Donada qualsevol equació, hi ha uns passos previs que sempre s'han de fer:

a) Treure parèntesis (si n'hi ha), aplicant la propietat distributiva del producte respecte de la suma o bé desenvolupant les potències indicades o efectuant els productes de les expressions algebraiques.

b) Treure denominadors (si n'hi ha), calculant el mínim comú múltiple de tots els denominadors de l'equació i multiplicant tots els termes per aquest.

c) Eliminar termes: quan en una equació surt un mateix terme (amb el mateix signe) en els dos membres, es pot eliminar.

d) Reduir termes: en qualsevol moment del procés de resolució d'una equació cal efectuar les sumes i restes indicades entre termes semblants.

Un cop realitzats aquests passos el *grau de l'equació* és el del terme de major grau.

Una equació polinòmica compatible determinada té tantes solucions (entre reals i complexes) com indica el seu grau. Això és a títol d'informació. No es veurà en aquest curs.

Les equacions polinòmiques es classifiquen i resolen segons el seu grau.

4. EQUACIONS DE PRIMER GRAU AMB UNA INCÒGNITA

Definició: una equació és de primer grau amb una incògnita quan és equivalent a l'equació: $\mathbf{a} \cdot x = \mathbf{b}$ on x és la incògnita i **a** i **b**, nombres.

Es a dir, quan després del procediment general de resolució, té una sola incògnita i d'exponent 1.

Resolució: es procedeix de la següent manera:

a) Transposició de termes: es passen tots els termes amb incògnita a un membre i els que no en tenen, a l'altre. Quan un terme està sumant en un membre passa restant a l'altre i viceversa, com a conseqüència de la de l'apartat 2.a) anterior.

b) Reducció de termes: s'efectuen les sumes i les restes que han quedat indicades tal com s'explica a l'apartat 3.d) anterior i l'equació queda de la forma $\mathbf{a} \cdot x = \mathbf{b}$.

c) Aïllament de la incògnita: si el coeficient (**a**), que queda multiplicant la incògnita, és diferent de 0, passa dividint a l'altre membre (amb el mateix signe) com a conseqüència de l'apartat 2.b):

$$x = \frac{b}{a}$$

Discussió: l'equació $\mathbf{a} \cdot x = \mathbf{b}$ pot presentar 3 casos:

a) $\mathbf{a} \neq 0$: hi ha una sola solució, que es troba aïllant x. Llavors l'equació és *compatible determinada.*

b) $\mathbf{a} = 0$: l'equació queda de la forma: $0 \cdot x = \mathbf{b}$

essent $\mathbf{b} \neq 0$, *no hi ha solució.* Per tant, es tracta d'una *equació incompatible.*

La major part de les vegades, però, ens adonarem que es tracta d'una equació incompatible perquè arribarem, en algun pas anterior, a una igualtat "absurda".

c) Si l'equació queda de la forma $0 \cdot x = 0$ perquè tant **a** com **b** valen zero:

qualsevol valor de x *és solució.* Tenim, doncs, una *equació compatible indeterminada.*

Moltes vegades, però, veurem que es tracta d'una equació compatible indeterminada perquè arribarem, en algun pas anterior, a una identitat evident.

EXEMPLE 1:

Resoleu:

$$5x - 2(1 - 3x) = 3(2x - 2) + 3x$$

Solució:

Traiem parèntesis aplicant la propietat distributiva del producte respecte a la suma:

$$5x - 2 + 6x = 6x - 6 + 3x \qquad (1)$$

Eliminem els termes 6x de cada membre: això es pot fer sumant als dos membres de l'equació l'oposat, –6x :

$$5x - 2 + \cancel{6x} - \cancel{6x} = \cancel{6x} - 6 + 3x - \cancel{6x}$$

Reduint termes:

$$5x - 2 = -6 + 3x \qquad (2)$$

Comparant les expressions (1) i (2) veiem que l'eliminació de termes iguals (amb el mateix signe) en els dos membres es pot fer directament i així ho farem sempre.

Fem la transposició de termes: com que és una equació de primer grau, passem els termes que tenen x al primer membre i els que no en tenen, al segon. Això ho aconseguim sumant als dos membres de l'equació els oposats dels termes que volem passar (propietat 2.1.a): com que volem passar el -2 i el 3x , sumarem a cada membre 2 i 3x:

$$5x - \cancel{2} + \cancel{2} - 3x = -6 + \cancel{3x} + 2 - \cancel{3x}$$

Reduint termes:

$$5x - 3x = -6 + 2 \qquad (3)$$

Comparant les expressions (2) i (3) veiem que la transposició de termes es pot fer directament aplicant la següent regla: quan un terme està sumant en un membre passa a l'altre restant i viceversa. Ho farem sempre així.

Reduint termes en l'expressió (3):

$$2x = -4 \qquad (4)$$

Per aïllar la incògnita dividim els dos membres de l'equació pel coeficient que multiplica la incògnita: 2.

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{-4}{2}$$

Simplificant la primera fracció:

$$x = \frac{-4}{2} = -2 \qquad (5)$$

Comparant les expressions (4) i (5) adonem-nos que, per aïllar la incògnita, el que cal fer és passar el coeficient que la multiplica (inclòs el signe), dividint a l'altre membre. Així és com es fa a la pràctica.

* Si volem fer la *comprovació* hem de substituir x per (–2) en l'equació inicial:

$$5(-2) - 2\,[1-3(-2)] = 3\,[2\,(-2) - 2] + 3(-2)$$

$$-10 - 2(1 + 6) = 3(-4 - 2) - 6$$

$$-10 - 14 = -18 - 6$$

$$-24 = -24$$

EXEMPLE 2:

Resoleu: $$\frac{x+3}{4} + \frac{1-5x}{2} = 3$$

Solució:

Traiem denominadors multiplicant els dos membres de l'equació pel mcm dels denominadors (propietat 2.1.b):

$$\text{mcm }(4,2) = 4$$

$$4 \cdot \left(\frac{x+3}{4} + \frac{1-5x}{2} \right) = 4 \cdot 3$$

Aplicant la propietat distributiva del producte respecte de la suma:

$$4 \cdot \frac{x+3}{4} + 4 \cdot \frac{1-5x}{2} = 12$$

En la pràctica es multipliquen directament pel mcm dels denominadors TOTS ELS TERMES DE L'EQUACIÓ, i així ho farem a partir d'ara.

Efectuem ara les divisions entre el mcm (4) i cada denominador (aquestes divisions seran sempre exactes):

$$1 \cdot (x+3) + 2 \cdot (1-5x) = 12$$

Traiem parèntesis:

$$x + 3 + 2 - 10x = 12$$

Reduïm termes semblants:

$$5 - 9x = 12$$

Efectuem la transposició de termes; passem el 12 al primer membre i el -9x al segon (canviant-los de signe):

$$5 - 12 = 9x$$

Reduïm termes semblants:

$$-7 = 9x$$

Per aïllar la incògnita passem el coeficient de x (9) dividint a l'altre membre:

$$x = \frac{-7}{9} = -\frac{7}{9}$$

---

* Per *comprovar* el resultat hem de substituir aquest valor en l'equació inicial.

$$\underset{(*)}{\frac{-\frac{7}{9}+3}{4}} + \underset{(**)}{\frac{1-5\left(-\frac{7}{9}\right)}{2}} = 3 \qquad \left\{ \begin{array}{l} (*)\ \frac{20/9}{4} = \frac{4 \cdot 5/9}{4} = \frac{5}{9} \\ (**)\ \frac{44/9}{2} = \frac{22}{9} \end{array} \right\} \frac{5}{9} + \frac{22}{9} = 3$$

Equacions elementals de segon grau amb una incògnita

1. EQUACIONS DE SEGON GRAU AMB UNA INCÒGNITA

Definició: una equació és de segon grau amb una incògnita quan és equivalent a l'equació:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

on x és la incògnita i **a**≠0, **b** i **c**, nombres.

És a dir, quan després del procediment general de resolució, el major exponent de la incògnita és 2.

No correspon a aquest curs ni l'estudi ni la pràctica amb ella. Només estudiarem un cas particular que explicarem en el següent apartat.

Quan ens donin una equació seguirem el procés de sempre.

Resolució:

a) Transposició de termes: es passen *tots* els termes a un mateix membre (com sempre, si un terme està sumant passa a l'altre membre restant i viceversa), i l'altre queda igual a 0.

b) Reducció de termes: s'efectuen les sumes i restes indicades (les dels termes de segon grau entre ells, les dels termes de primer grau entre ells i les dels termes independents entre ells).

En aquest moment, si l'equació és de segon grau quedarà de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

on **a**≠0.

(Si **a**=0, aleshores serà una *equació de primer grau*, i es resoldrà com ja sabem.)

c) Aïllament de la incògnita: amb la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Insistim que no correspon a aquest curs ni estudiar-la ni practicar amb ella. Només en el cas particular que explicarem a continuació.

2. EQUACIONS DE SEGON GRAU AMB UNA INCÒGNITA EN EL CAS a = 1, b = 0, c < 0

En aquest curs només estudiarem aquest cas particular, en el que l'equació de segon grau és:

$$x^2 + c = 0$$

(**C** < 0)

Només fem la deducció per entendre la solució final. En aplicar-hi la fórmula general, com que

a = 1, **b = 0**, dóna

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{-4 \cdot 1 \cdot c}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm\sqrt{-4 \cdot 1 \cdot c}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm\sqrt{4 \cdot (-c)}}{2} =$$

$$= \frac{\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{-c}}{2} = \frac{\pm 2\cdot\sqrt{-c}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{-c}}{2} = \pm\sqrt{-c} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-c}$$

Fixeu-vos que el valor de **c** és negatiu (**c < 0**), per tant — **c** dins l'arrel quadrada és positiu per la regla: —(— **) = + . Això vol dir que sempre que c sigui negatiu, l'arrel quadrada sempre es podrà calcular i l'equació anterior tindrà solució.**

EXEMPLE 1: Resoleu l'equació $x^2 - 25 = 0$

En el procés de resolució d'aquest tipus d'equacions sempre farem

$$x^2 - 25 = 0, \quad x^2 = 25, \quad x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

Fixeu-vos que trobar les x, el quadrat de les quals és un nombre donat positiu (a l'exemple és 25), vol dir calcular l'arrel quadrada d'aquest nombre positiu i posar davant del resultat de l'arrel un signe més(+) i un menys(—). Ambdós seran solucions. En elevar al quadrat cadascun d'ells, resulta el nombre donat (**això ho podeu fer com a comprovació**). Així, les solucions de l'equació són: x = — 5 i x = + 5.

EXEMPLE 2 : Resoleu l'equació $x^2 - 121 = 0$

$x^2 - 121 = 0$, $x^2 = 121$; es fa l'arrel quadrada de 121; solucions: x = +11, x = —11

EXEMPLE 3: Resoleu l'equació $x^2 + 16 = 0$

No es pot resoldre aquest tipus d'equació quan, entre x^2 i el terme independent **C,** hi ha un signe +,

$$x^2 + 16 = 0, \quad x^2 = -16, \quad x = \pm\sqrt{-16}$$

perquè l'arrel quadrada d'un nombre negatiu no és un nombre real. Si feu l'arrel quadrada de —16 en una calculadora científica, donarà error i si ho feu en una gràfica, donarà 4·***i*** (***i*** s'anomena variable complexa). Quan estudieu més matemàtiques -si és el cas, a mi m'encantaria- sabreu què significa. Ara, ho deixem com una altra incògnita(?) de la que no és adient parlar-ne aquí.

PERÒ, QUÈ TÉ A VEURE TOT AIXÒ AMB EL TEOREMA DE PITÀGORES? Ara introduirem aquest teorema, però més endavant en parlarem amb molt més detall. Fixeu-vos en el títol "COM S'APLICA EL TEOREMA DE PITÀGORES, UTILITZANT L'EQUACIÓ DE 2n GRAU" de la pàgina 2 del document que s'obrirà en clicar dins de L1.1.

Per últim, s'ha de tenir en compte que quan apliquem al teorema de Pitàgores l'equació de segon grau que hem explicat, ho estem fent en un triangle rectangle i **la incògnita és un costat** del triangle que pot ser la hipotenusa o un dels catets. **Per tant, sempre deixarem el signe positiu com a solució, ja que no té sentit donar un costat amb longitud negativa**.